UFSC - CFM
DEPTO. DE FÍSICA
FÍSICA EXPERIMENTAL I - FSC 5122

EXPERIÊNCIA M003-Log

PÊNDULO SIMPLES

1 - OBJETIVOS

a) Medir a aceleração da gravidade local.
b) Identificar o equipamento e entender seu funcionamento.
c) Interpretar os dados experimentais coletados bem como os resultados finais.

2 - TEORIA BÁSICA

Um movimento que se repete em intervalos de tempo regulares é chamado movimento periódico. O movimento de um pêndulo, a vibração da corda de um instrumento musical, e a rotação da Terra são exemplos de movimento periódico.

Se um corpo, em movimento periódico, vibra em torno de sua posição de equilíbrio, diz-se que ele efetua um movimento harmônico. Nesses casos existe uma força restauradora que é sempre dirigida para a posição de equilíbrio do corpo. Se esta força for proporcional ao deslocamento a partir da posição de equilíbrio, o movimento é dito harmônico simples. Portanto, a condição para que um corpo execute um movimento harmônico simples é que ele esteja submetido a uma força do tipo:

$$F = -k\,x, \qquad \textbf{(1)}$$

onde k é uma constante de proporcionalidade que está relacionada às características físicas do sistema oscilante e x é seu deslocamento da posição de equilíbrio. Aplicando essa expressão na segunda lei de Newton ($F = m\,a$), temos que

$$-k\,x = m\,a,$$

onde m é a massa do corpo e a sua aceleração. Rearranjando os termos, e lembrando que a aceleração é a derivada segunda de x com respeito ao tempo, obtém-se que

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + k\,x = 0. \qquad \textbf{(2)}$$

Esta equação diferencial tem como solução $x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$, onde A e δ são constantes que dependem das condições iniciais do sistema, e ω é a chamada frequência angular do movimento, dada por

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\,.$$

É mais conveniente expressar esta relação em termos do período $\boldsymbol{T}$ do movimento oscilatório, o qual se relaciona com $\boldsymbol{\omega}$ através de $\boldsymbol{T = 2\pi / \omega}$. Fazendo isso obtemos

$$T = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{m}{k}}\,. \tag{3}$$

Esta relação é obedecida por qualquer corpo que executa um movimento harmônico simples. Ela se aplica a sistemas tão diversos como molas, pêndulos, moléculas, circuitos elétricos, ondas sonoras e até mesmo ondas gravitacionais geradas pela fusão de buracos negros. O significado de $\boldsymbol{k}$ varia de um caso a outro. A seguir veremos como fica a equação (3) no contexto de um pêndulo simples.

PÊNDULO SIMPLES

Um pêndulo simples é uma massa puntiforme suspensa por um fio leve e inextensível. A figura abaixo mostra um pêndulo simples de massa $\boldsymbol{m}$ e comprimento $\boldsymbol{L}$, deslocado por um ângulo $\boldsymbol{\theta}$ com respeito à vertical. Desprezando a resistência do ar e o atrito com o suporte, as forças que atuam no pêndulo são a tração do fio e o peso ($\boldsymbol{mg}$). A componente do peso ao longo da direção do fio compensa a tração, de modo que a única força relevante é a componente do peso na direção tangencial à trajetória:

$$\boldsymbol{F = -\,m\,g\,sen(\,\theta\,) = -\,m\,g\,sen(\,x\,/\,L\,)},$$

onde usamos $\boldsymbol{sen(\theta) = x / L}$ para escrever a força em termos do arco $\boldsymbol{x}$ descrito pela massa em seu movimento. Esta é a força restauradora no pêndulo simples, a força que o puxa de volta para a posição de equilíbrio ($\boldsymbol{\theta = x = 0}$).

A presença da função seno nessa equação faz com que a oscilação causada por essa força não seja exatamente harmônica. Para ângulos pequenos, no entanto, ela é bem descrita como um movimento harmônico simples. Nesse caso podemos usar a aproximação $\boldsymbol{sen(x/L) \sim x/L}$, o que nos leva a:

$$\boldsymbol{F = -\,m\,g}\,\frac{x}{L}\,.$$

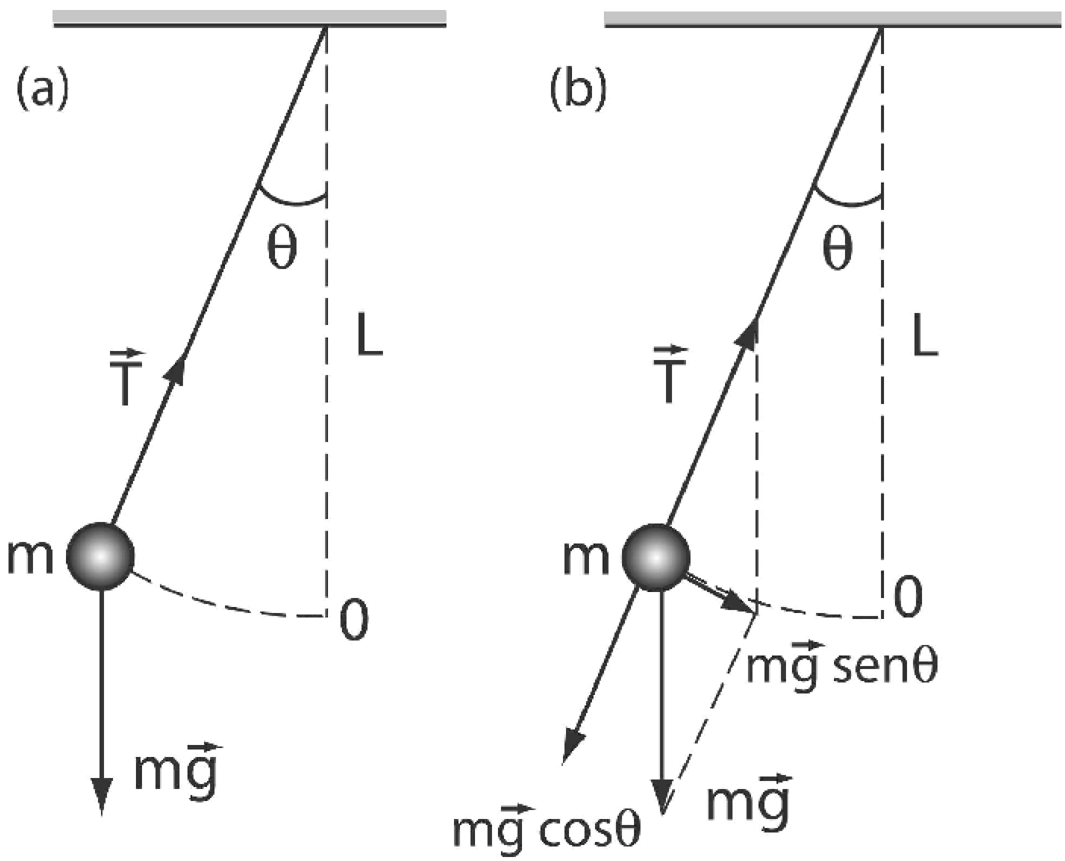
Agora sim temos uma força restauradora do tipo $\boldsymbol{F = -\,k\,x}$ (equação 1), onde

$$\boldsymbol{k = \frac{mg}{L}}.$$

Substituindo esse $\boldsymbol{k}$ na equação (3) obtemos a conhecida relação entre o período de um pêndulo simples e seu comprimento:

$$\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}\,. \qquad \textbf{(4)}$$

Esta relação nos permite determinar a aceleração da gravidade a partir de medidas experimentais do comprimento e período de um pêndulo simples.

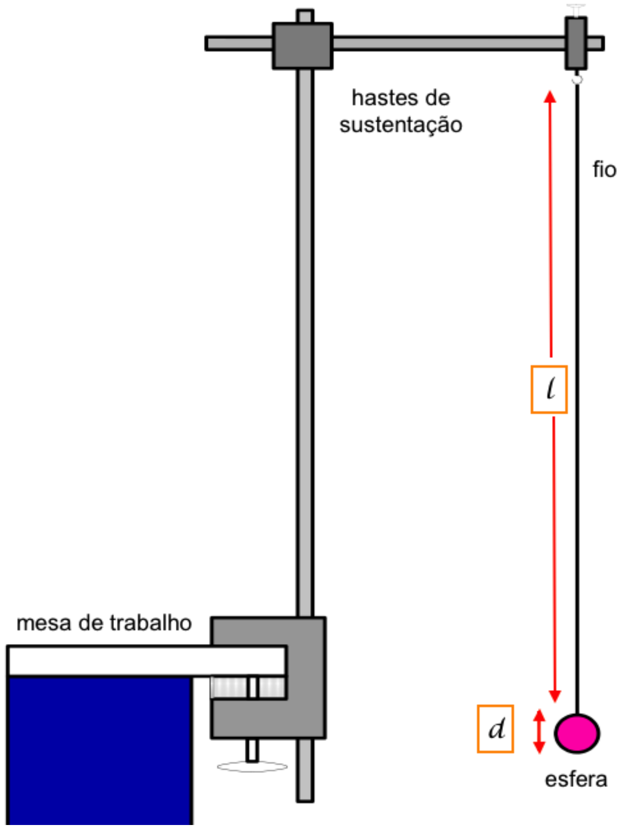


3 - <u>BIBLIOGRAFIA</u>

RESNICK - HALLIDAY - Vol. 1.; SEARS - ZEMANSKY - YOUNG - Vol. 1.;
BRÚAT - FOCH – Mecânica

4 - PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

Nesta experiência você determinará a aceleração da gravidade (***g***) utilizando um pêndulo simples como o do diagrama abaixo.



A experiência se divide em duas partes. Na primeira parte você obterá medidas repetidas de ***T*** para um ***L*** fixo e usará um tratamento estatístico para estimar ***g*** e seu erro propagado (***Δg***). Na segunda parte você variará o comprimento do pêndulo e analisará o comportamento de ***T*** com ***L*** em um gráfico di-log.

Em ambas partes utilizaremos a equação (3) para extrair ***g*** a partir de medidas de ***T*** e ***L***. Na prática, porém, você não medirá nem ***L*** nem ***T*** diretamente. ***L*** será calculado somando o comprimento do fio (***l***) de nylon com o raio da esfera

$$L = l + d/2,$$

onde ***d*** é o diâmetro da esfera, que é o que você efetivamente medirá com o micrômetro. Já o período será calculado medindo o tempo ***t*** de **10** oscilações, tal que

$$T = t\,/\,10.$$

Esse procedimento diminui bastante a incerteza na tomada de tempos.

4.1 - PARTE I

<u>Coleta de dados</u>: Anote todos resultados na <u>tabela 1</u>, usando as unidades indicadas e incluindo os erros de escala.

1 - Meça o diâmetro ***d*** da esfera com o micrômetro.
2 - Deixe o fio em sua extensão máxima e meça seu comprimento ***l***.
3 - Afaste o pêndulo de um ângulo pequeno (menor que ~ 20º) da posição de equilíbrio e cronometre o tempo ***t*** necessário para 10 oscilações.
4 - Repita a medida de ***t*** mais quatro vezes, até preencher a tabela.

<u>Análise dos dados: Tratamento estatístico</u>

Isolando ***g*** na equação (3) e substituindo ***L = l + d/2*** e ***T = t/10*** na equação (3) obtém-se

$$g = \frac{400\pi^2(l + \frac{d}{2})}{t^2}$$

onde o lado direito contém apenas grandezas medidas experimentalmente. Usaremos esta equação não apenas para calcular ***g***, mas também para calcular sua incerteza ***Δg***. Como ***g = g(l,d,t)***, isto é, como ***g*** depende de ***l***, ***d***, e ***t***, os erros em cada uma dessas variáveis se propagam para ***g***. Aplicando a fórmula de propagação de erros a esse caso

$$\Delta g = \left|\frac{\partial g}{\partial l}\right| \Delta l + \left|\frac{\partial g}{\partial d}\right| \Delta d + \left|\frac{\partial g}{\partial t}\right| \Delta t$$

e resolvendo as derivadas obtemos que

$$\Delta g = \frac{400\pi^2}{t^2}\Delta l + \frac{200\pi^2}{t^2}\Delta d + \frac{800\pi^2(l + \frac{d}{2})}{t^3}\Delta t$$

Nessas equações, ***l***, ***d***, ***Δl***, e ***Δd*** são exatamente os que você anotou na tabela 1. As medidas de ***t***, no entanto, precisam passar por um tratamento estatístico. Para tanto siga os seguintes passos, anotando os resultados na <u>tabela 2</u> (sem arredondamentos):

1 - Calcule o tempo médio $\bar{t}$, seu desvio padrão σ e o erro aleatório provável $E_{ap}(t)$.
2 - Calcule o erro total em ***t*** somando os erro de escala e aleatório: $\Delta t = \Delta t_{esc} + E_{ap}(t)$
3 - Calcule os valores de ***g*** e ***Δg***.

Com esses resultados escreva seu resultado final para ***g*** na tabela 3, arredondando o valor de acordo com o erro ***Δg*** encontrado.

4.2 - PARTE II

<u>Coleta de dados:</u> Anote todas medidas na <u>tabela 4</u>, usando as unidades indicadas. Note que a tabela já contém uma medida inicial com um pêndulo muito maior do que o que você tem no laboratório!

1 - Deixe o fio em sua extensão máxima (~ 180 cm) e meça seu comprimento $\boldsymbol{l}$.
2 - Calcule o comprimento total $\boldsymbol{L = l + d/2}$. (Use o diâmetro da tabela 1)
3 - Afaste o pêndulo de um ângulo pequeno (menor que ~ 20º) da posição de equilíbrio e cronometre o tempo $\boldsymbol{t}$ necessário para 10 oscilações.
4 - Calcule o período $\boldsymbol{T = t / 10}$ correspondente.
5 - Reduza o comprimento do fio por aproximadamente 25 cm e repita as medidas até preencher a <u>tabela 4</u>.

<u>Análise dos dados: Tratamento gráfico</u>

1 - Construa um gráfico de $\boldsymbol{T}$ (variável dependente) contra $\boldsymbol{L}$ (variável independente) em um papel *di-log*.
2 - Trace "a olho" uma reta que represente adequadamente os pontos experimentais.
3 - Esta reta experimental pode ser usada para estimar a aceleração da gravidade, $\boldsymbol{g}$. Para tanto você deve primeiramente linearizar a equação (4) aplicando o logaritmo a ambos lados da equação e compará-la com a equação de uma reta: $\boldsymbol{Y = A + B\,X}$. Faça essa análise teórica e anote na <u>tabela 5</u> quem são $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$.
4 – Para determinar os coeficientes $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ de uma reta basta conhecer dois pontos da mesma. Escolha dois pontos $\boldsymbol{P_1 = (L_1, T_1)}$ e $\boldsymbol{P_2 = (L_2, T_2)}$ ao longo da reta traçada e anote-os na <u>tabela 6</u>. Atenção: Escolha pontos bem separados e que não coincidam com os pontos experimentais.
5 - Use seus valores de $\boldsymbol{(L_1, T_1)}$ e $\boldsymbol{(L_2, T_2)}$ e a linearização da <u>tabela 5</u> para calcular valores experimentais para $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$. Anote seus resultados na <u>tabela 6</u>.
6 - Use a relação entre o coeficiente $\boldsymbol{A}$ e a aceleração da gravidade (tabela 5) para determinar o valor de $\boldsymbol{g}$. Anote seu resultado na <u>tabela 6</u>, observando o número de algarismos significativos.