

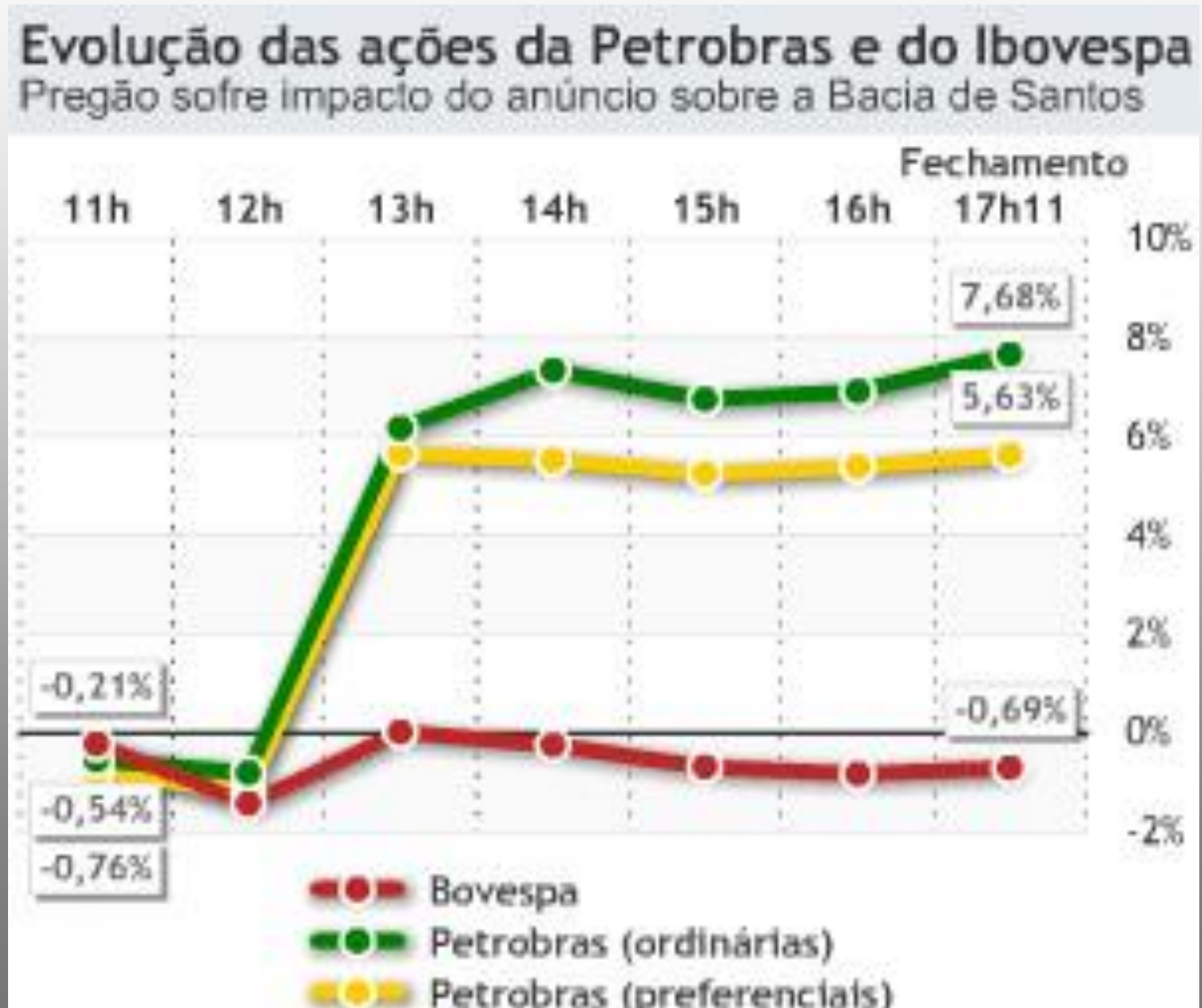
GRÁFICOS

- 1) Introdução
- 2) Construção de um gráfico
- 3) Função Linear
- 4) Linearização de Curvas
- 5) Método dos Mínimos Quadrados
- 6) Escalas Especiais: mono-log, log-log, etc..

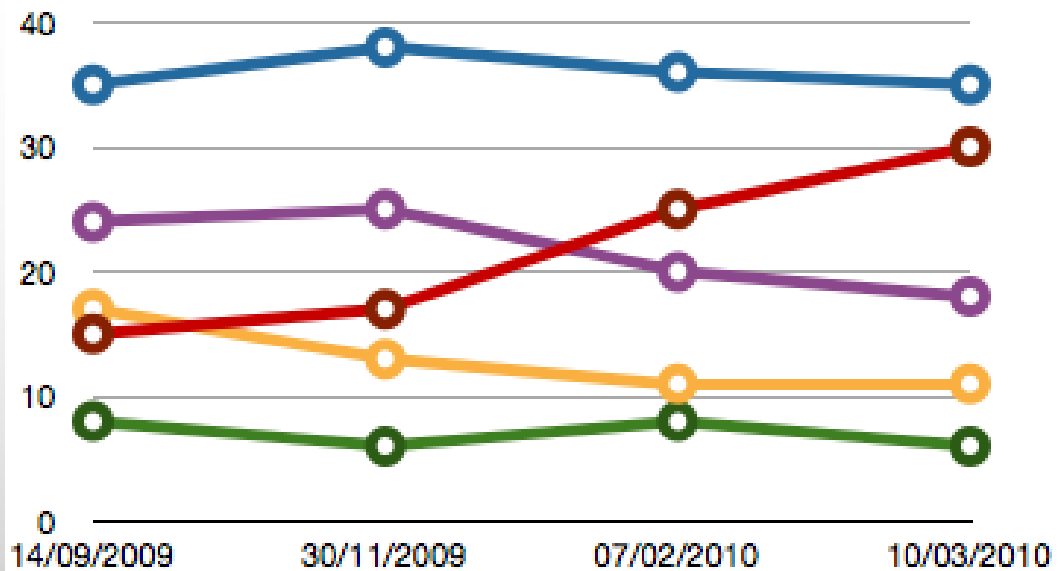
Flavio R. R. de Lima

J. Ricardo Marinelli

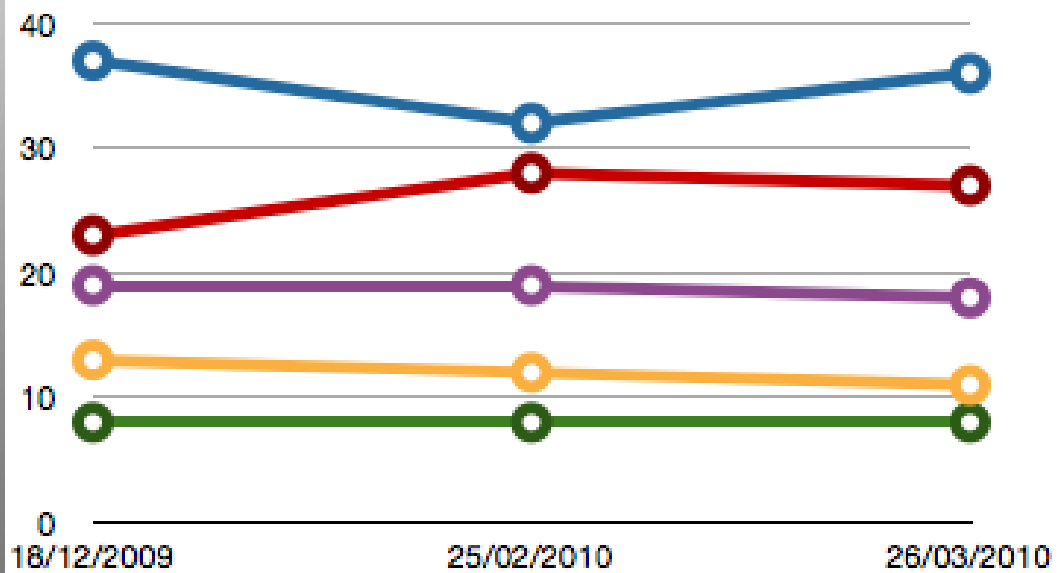
figura tirada do site www.estadao.com.br



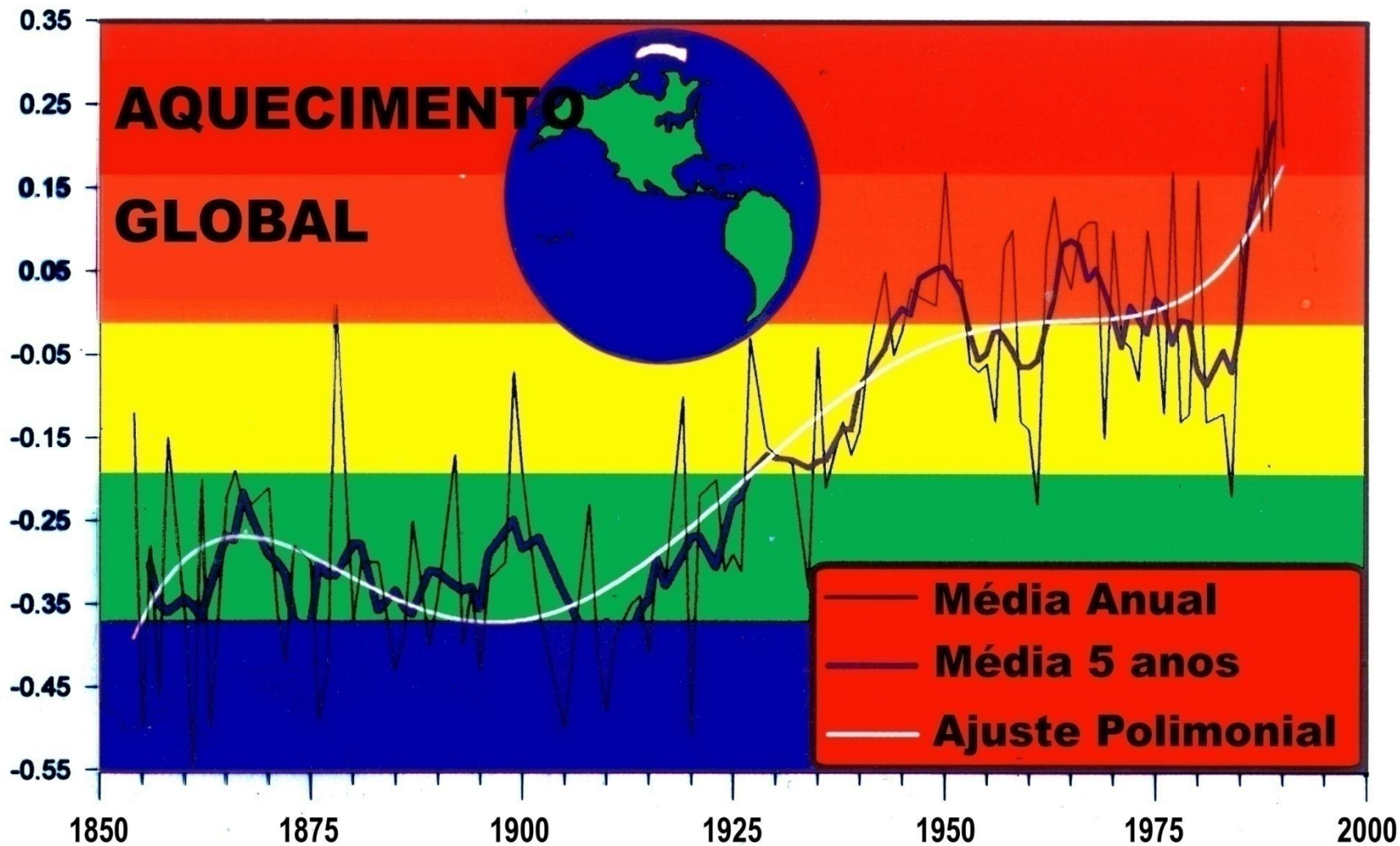
Ibope



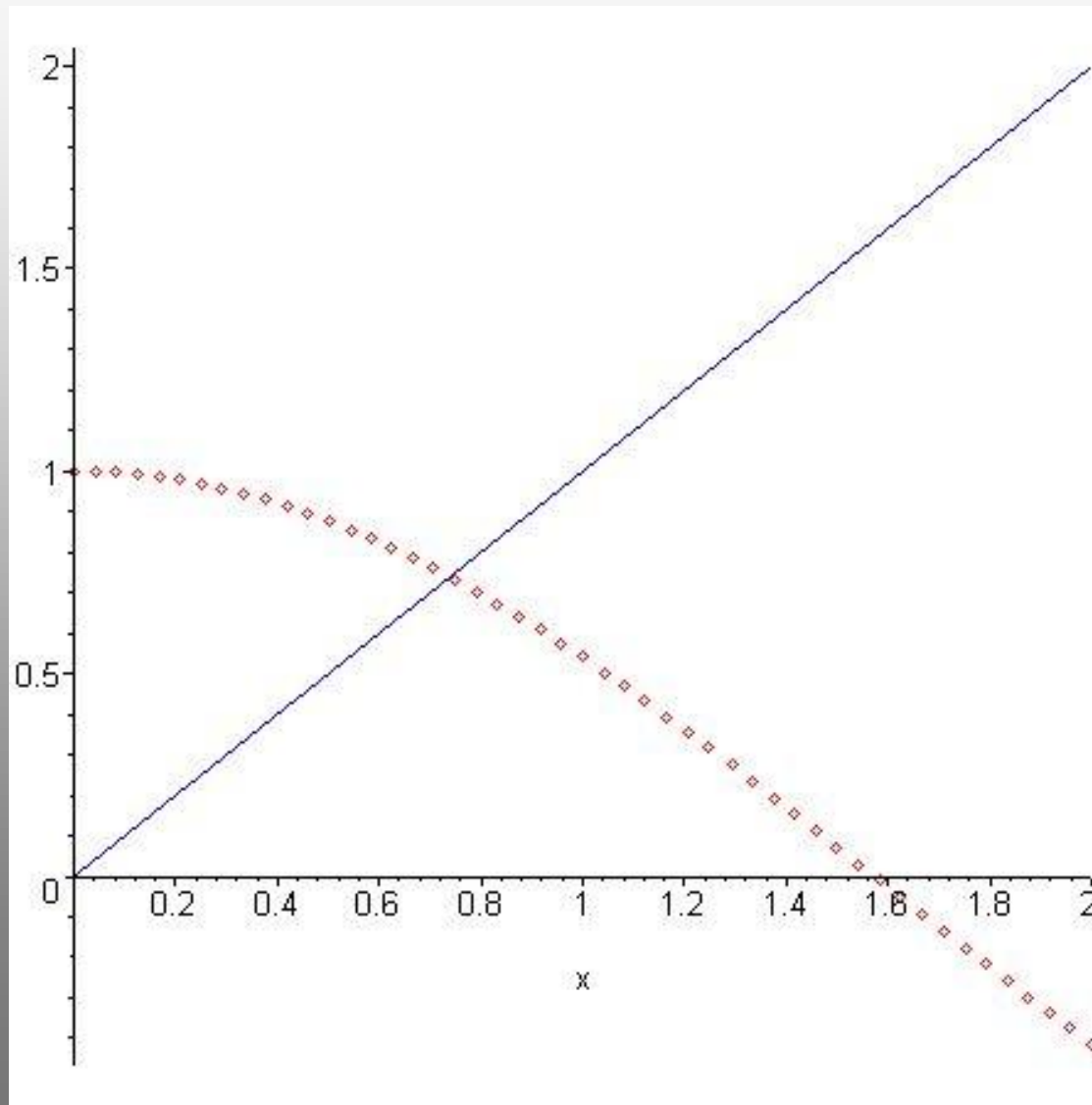
Datafolha



Temperatura Média (°Celsius)



solução gráfica para a equação $x = \cos(x)$



Construindo um Gráfico

- a) Escolha e identificação dos eixos
(variáveis dependentes e independentes)
- b) Divisão da escala
- c) Marcação dos pontos experimentais
- d) Traçado da curva

- Escolha e identificação dos eixos

- SE ESTAMOS TENTANDO ESTUDAR EXPERIMENTALMENTE A RELAÇÃO MATEMÁTICA ENTRE DUAS GRANDEZAS, A **VARIÁVEL** (GRANDEZA FÍSICA) **INDEPENDENTE**, É AQUELA CUJOS VALORES VAMOS ESCOLHER, ENQUANTO QUE A **VARIÁVEL** (GRANDEZA FÍSICA) **DEPENDENTE** SERÁ OBTIDA COMO CONSEQUÊNCIA DAS ESCOLHAS REALIZADAS.



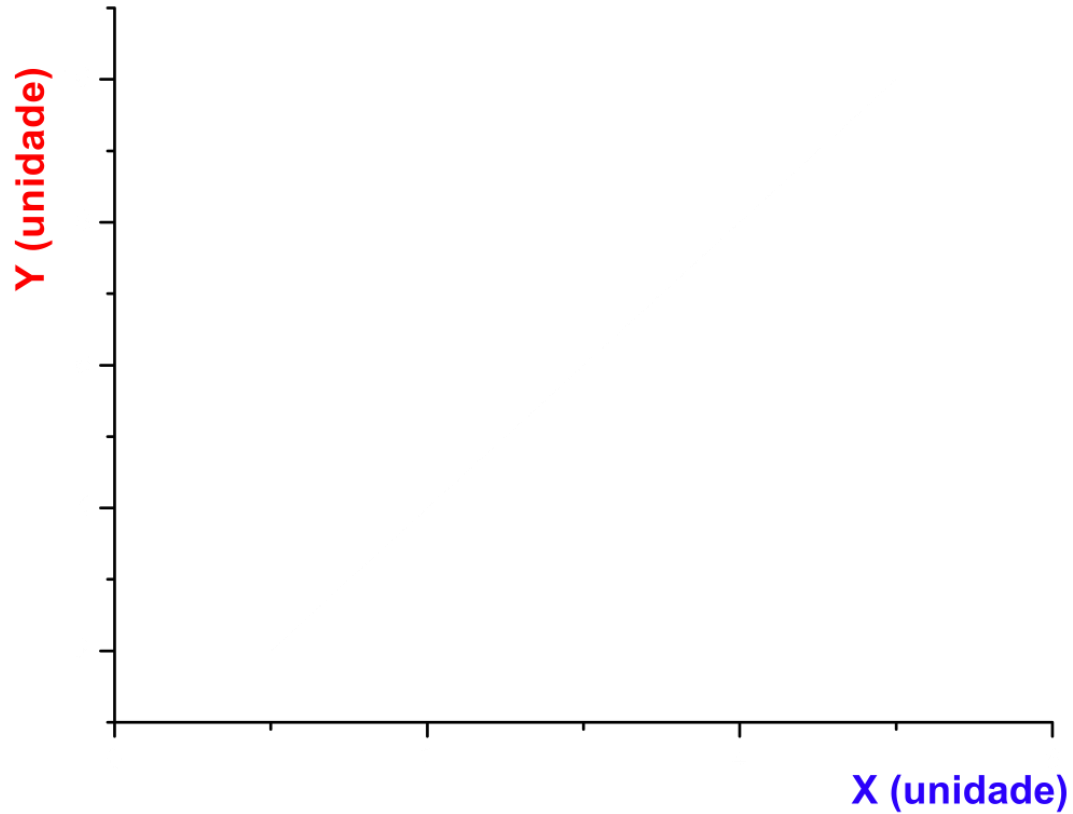
EMBRIAGUEZ MENTAL

Um guru observou que, nos dias em que as pessoas mais bebiam cerveja na praia, mais sol havia. Conclusão dele: quanto maior o consumo de cerveja, melhor será o tempo. A correlação está correta (mais cerveja, mais sol), mas a causalidade, errada (na verdade, quanto mais calor, maior a venda de cerveja). Em economia, nem sempre correlações dizem algo. É preciso analisar sempre outros fatores

$$y = f(x)$$

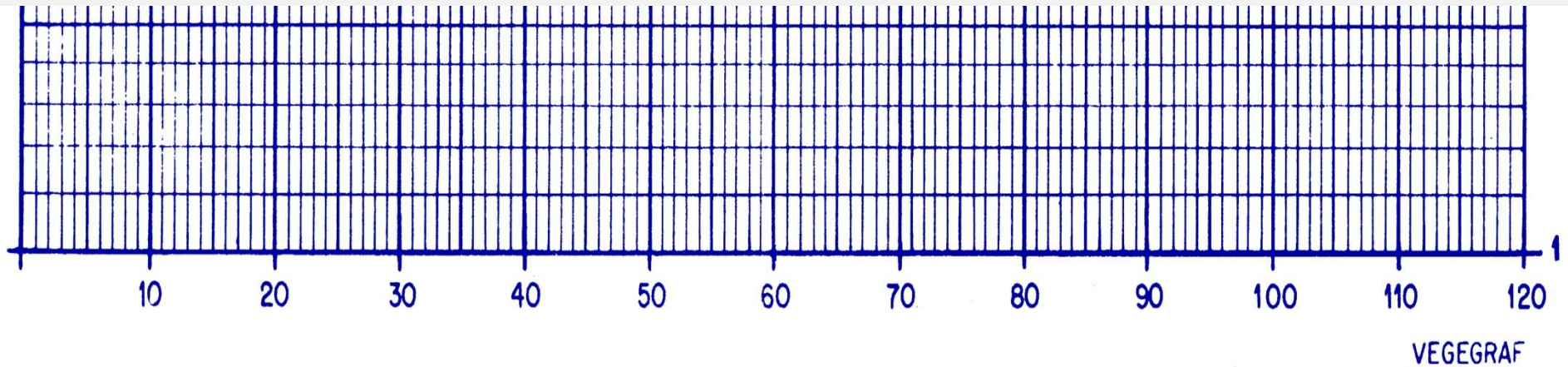
- variável independente – eixo horizontal(*abcissa*)
- variável dependente – eixo vertical(*ordenada*)

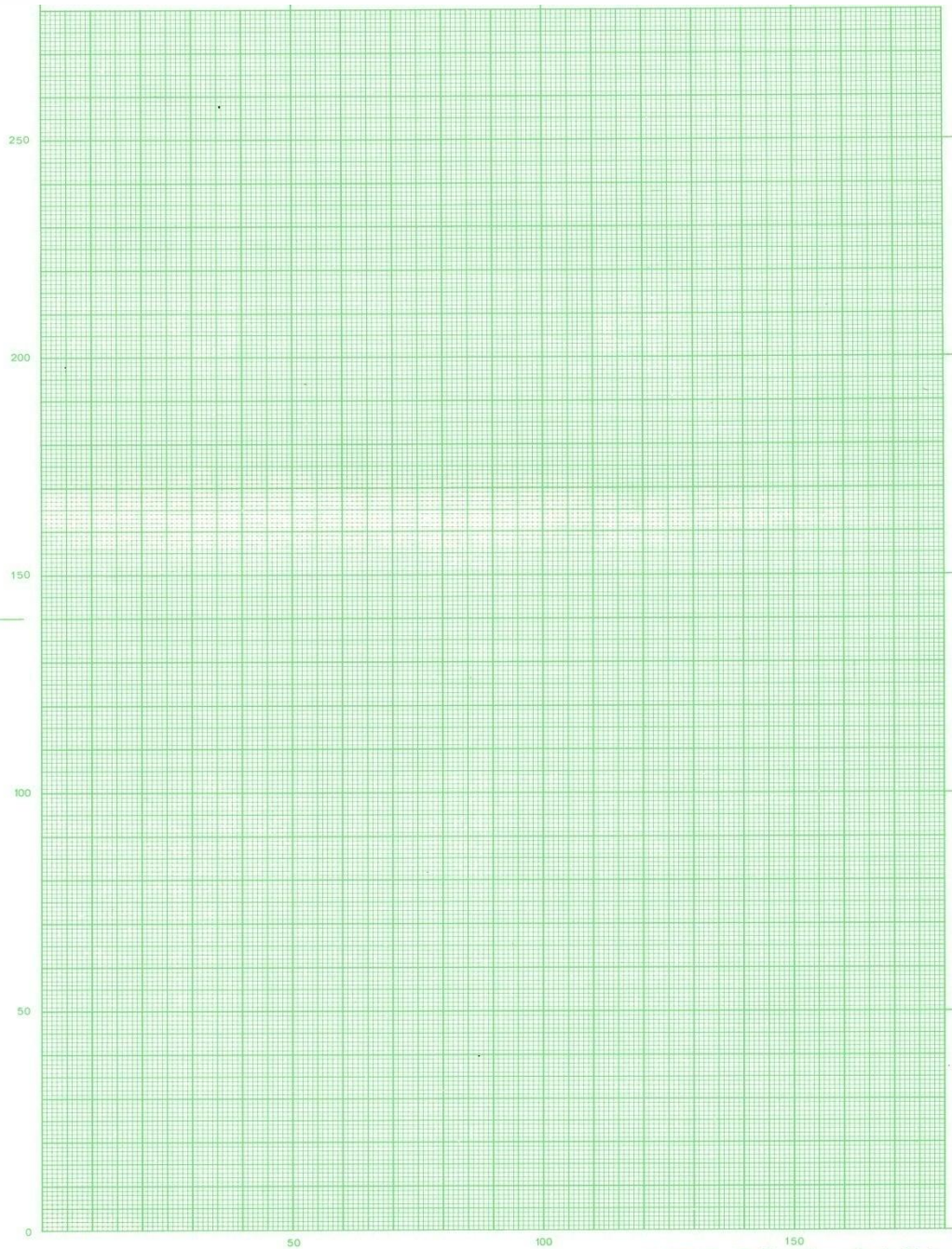
Símbolos+unidades



Escala linear

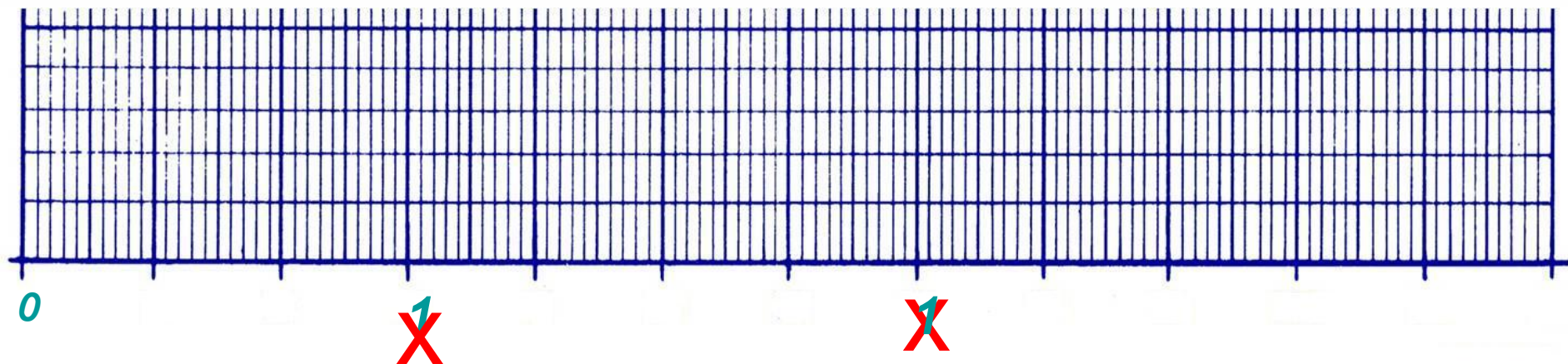
blocos com 10 divisões=10mm.





Divisão da escala

- a escolha da escala deve ser baseada em dois pontos essenciais: **fácil reconhecimento** e que **os pontos se distribuam ocupando a maior parte possível da escala**.
- A escala não precisa começar em zero e nem precisa (geralmente não é) ser igual para os dois eixos coordenados.
- No papel, deve-se marcar apenas os pontos regulares da escala, ou seja, apenas aqueles necessários para uma boa visualização e reconhecimento da mesma.



Para evitar situações como as acima mostradas, escolher sempre um bloco de divisões (em geral 10mm) como sendo

1; 2; 2,5; 4; 5; 10 vezes uma potência de dez.

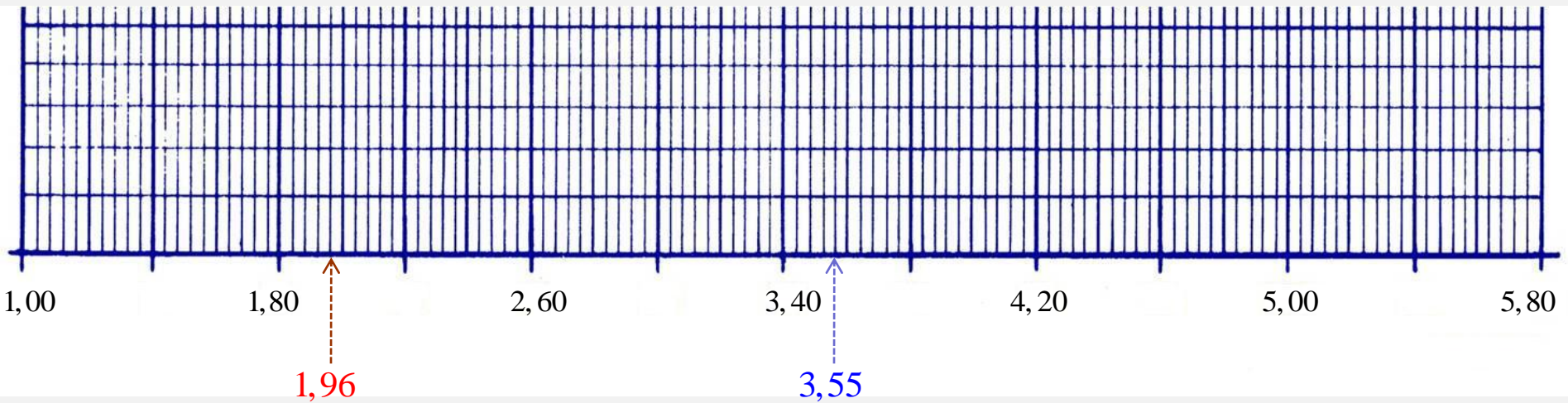
regra prática (nem sempre é a melhor escolha):

$$\frac{x_{\max} - x_{\min}}{\text{Tamanho do papel(em cm)}} = p$$

Caso p não seja **1; 2; 2,5; 4; 5; 10** vezes uma potência de dez, escolhe-se o valor imediatamente acima de p , que seja.

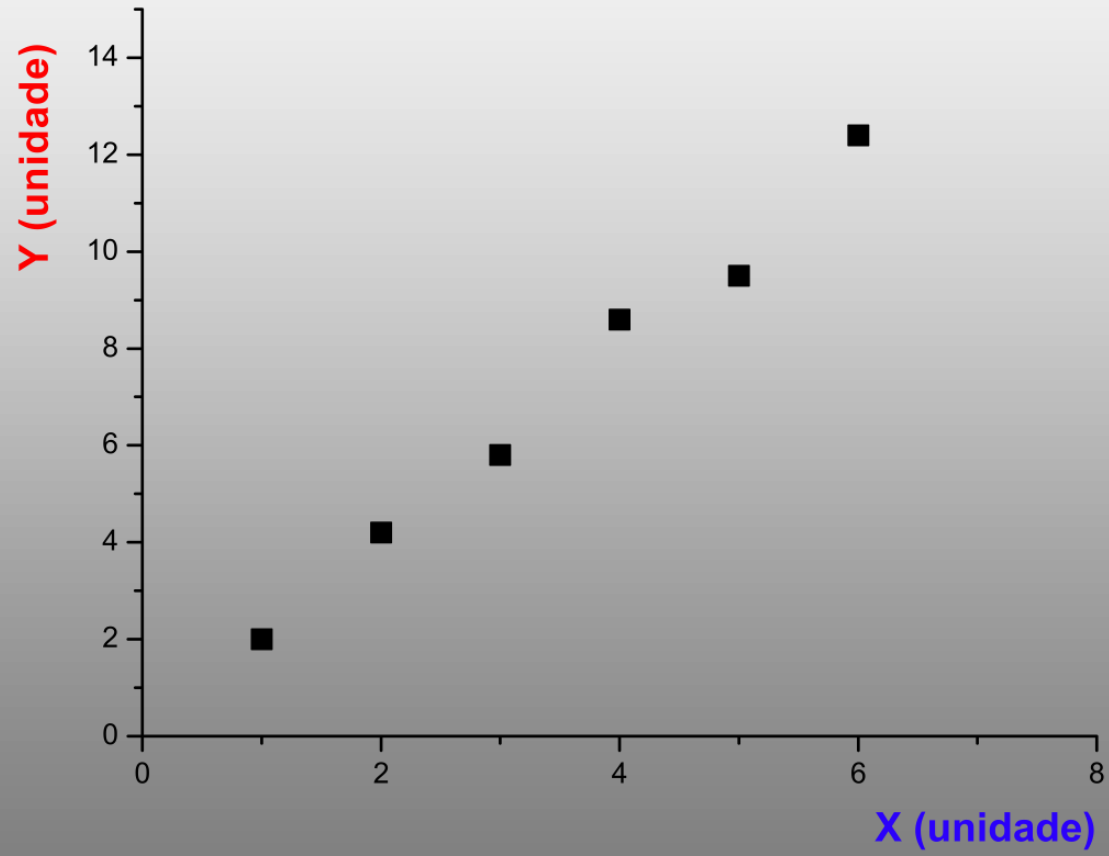
d(cm)	1,05	1,96	2,50	3,55	4,95
-------	------	------	------	------	------

$$\frac{4,95 - 1,05}{12} = 0,325 \Rightarrow 0,4$$



Marcação dos pontos

- Para evitar que confunda-se um ponto experimental com alguma sujeira perdida no gráfico, os pontos experimentais devem ser realçados com um símbolo qualquer, sendo os mais usados :
 - \oplus , \otimes , \odot , \times , Δ , \dagger , \square , etc..

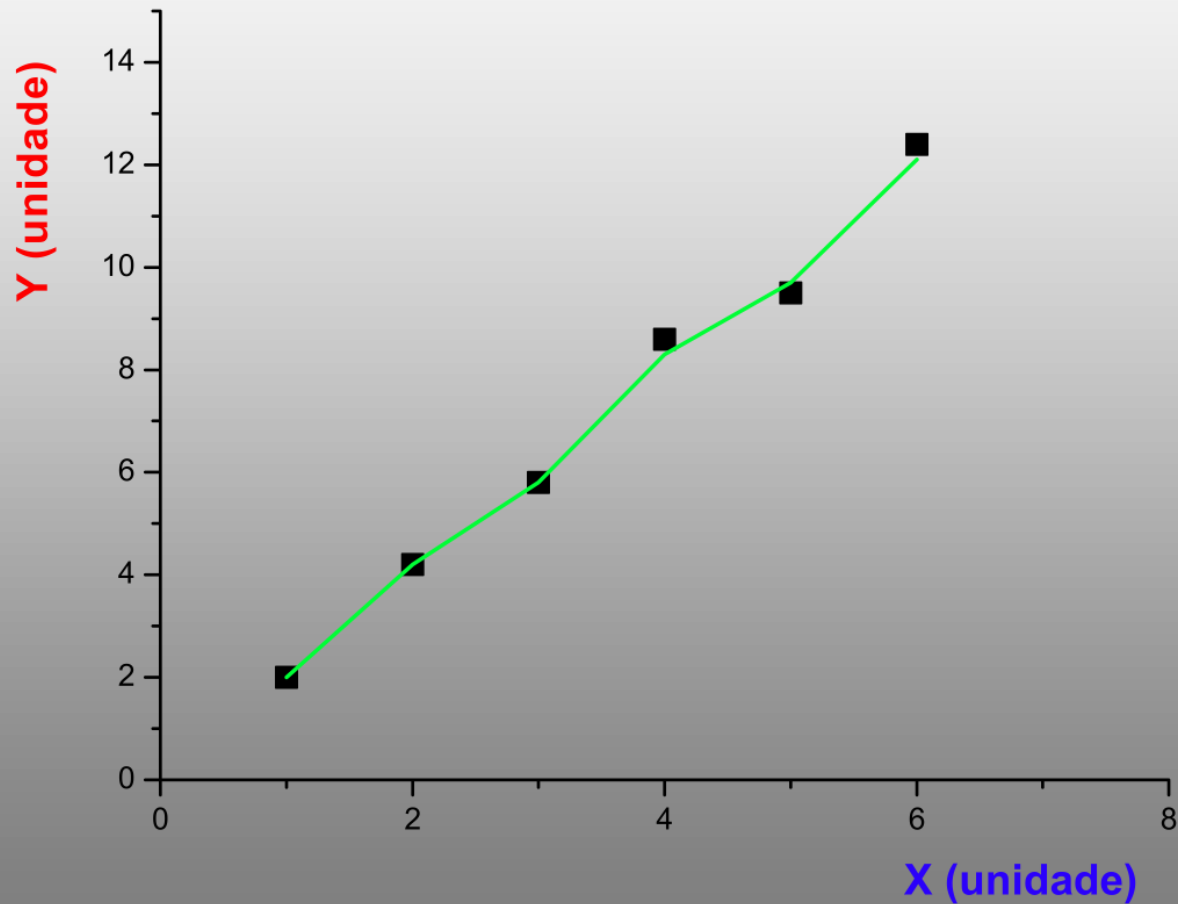


Traçado da Curva

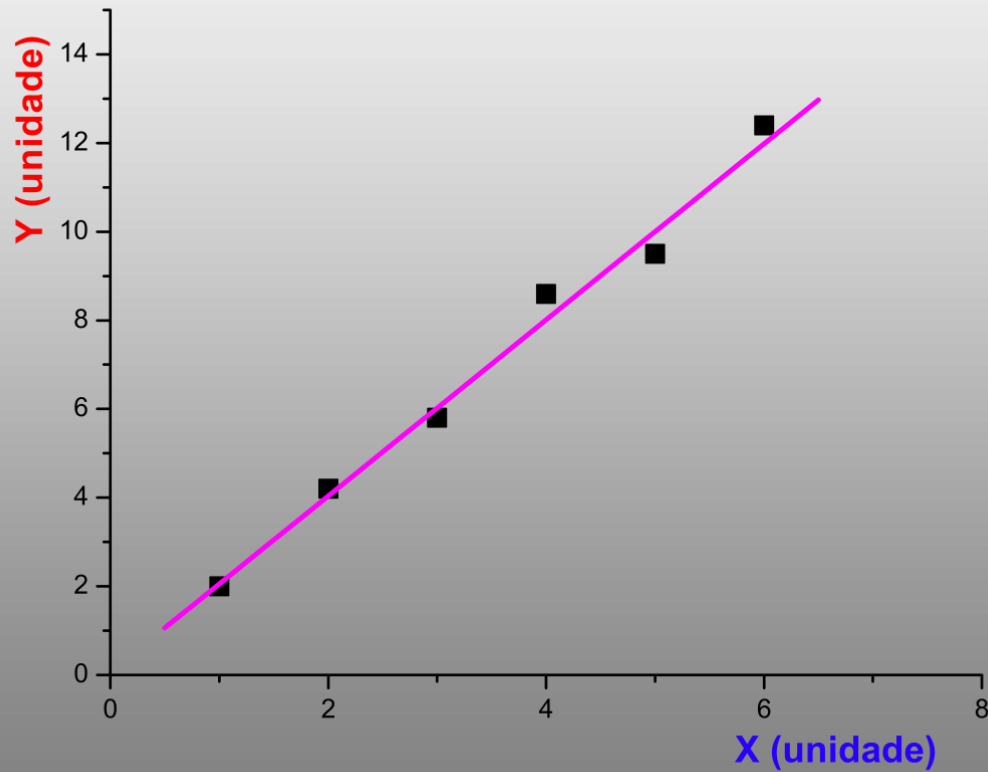
Traçar uma curva suave que mostre a “tendência” dos ptos. experimentais:

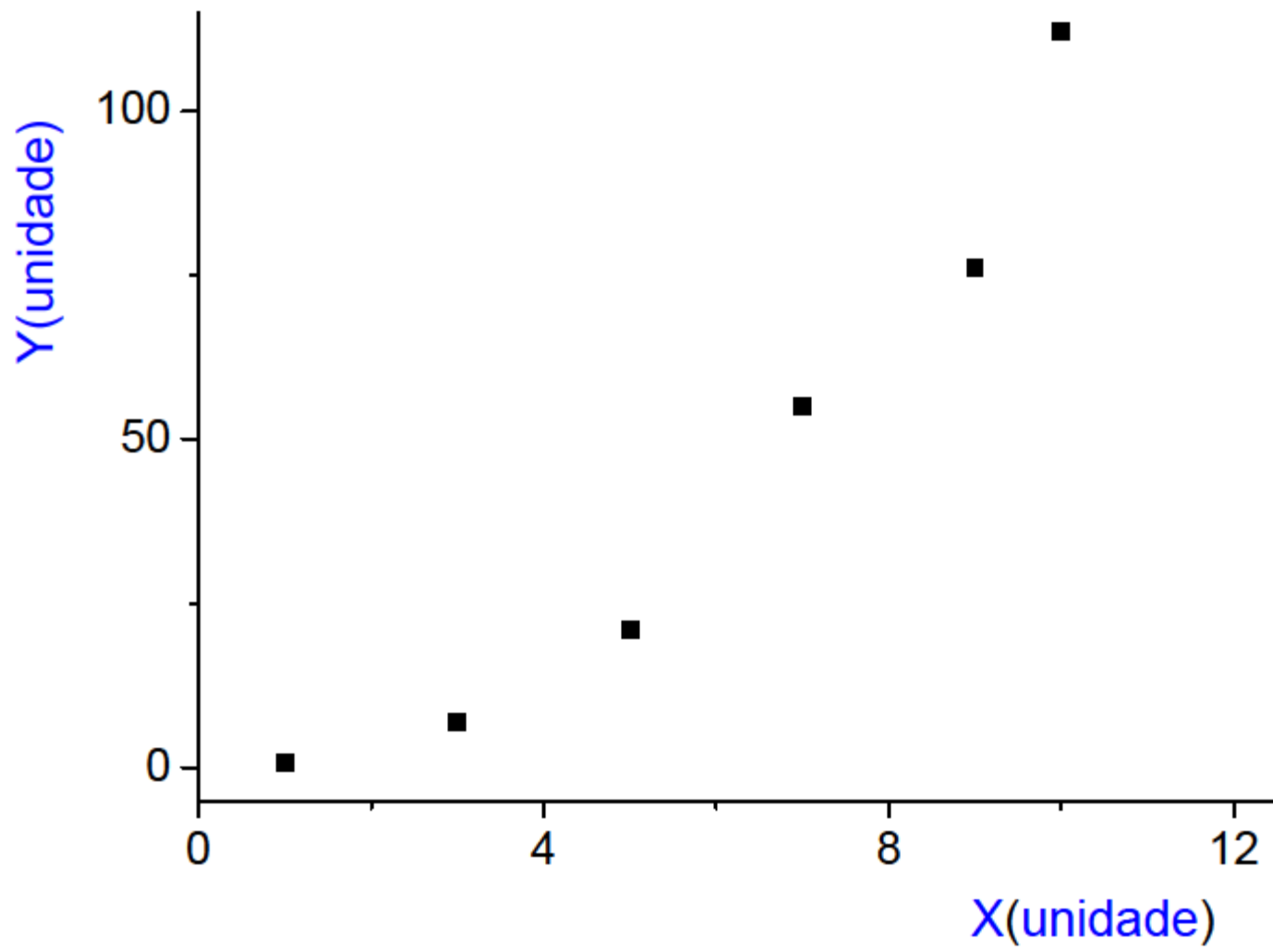
embora seja a situação ideal, não é necessário que a curva passe por todos os pontos.

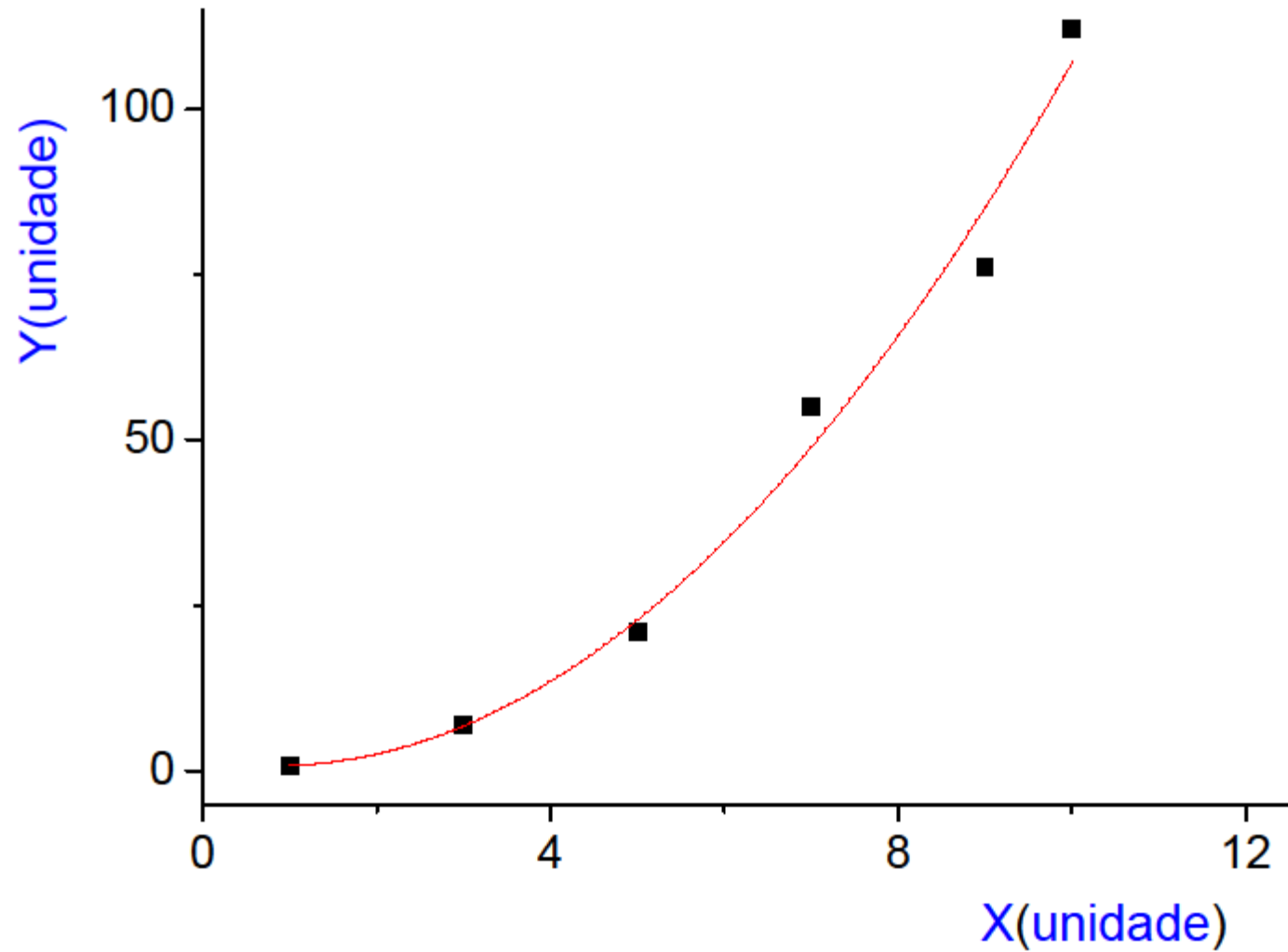
Ligar os pontos--ERRADO



traçar *melhor* curva -- CERTO







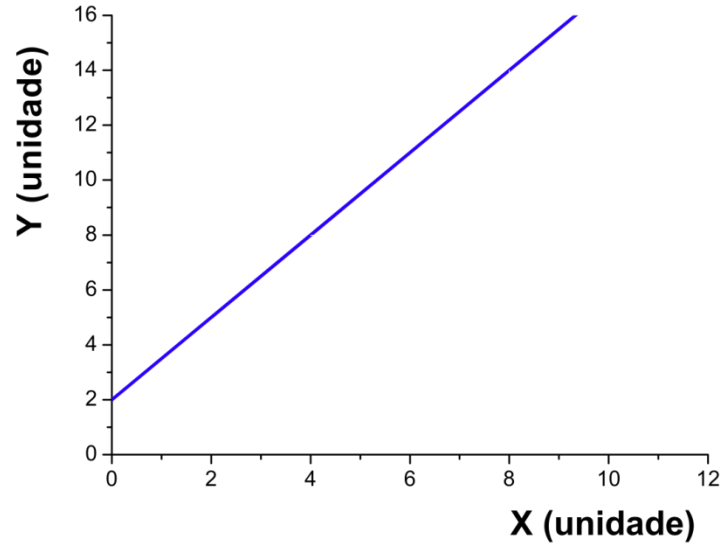
Função Linear

$$y = A + B.x$$

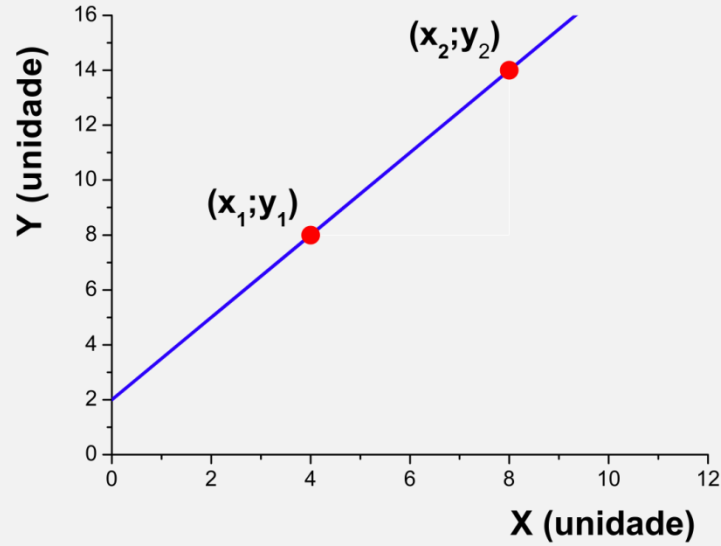
A  parâmetro linear da reta

B  parâmetro angular da reta

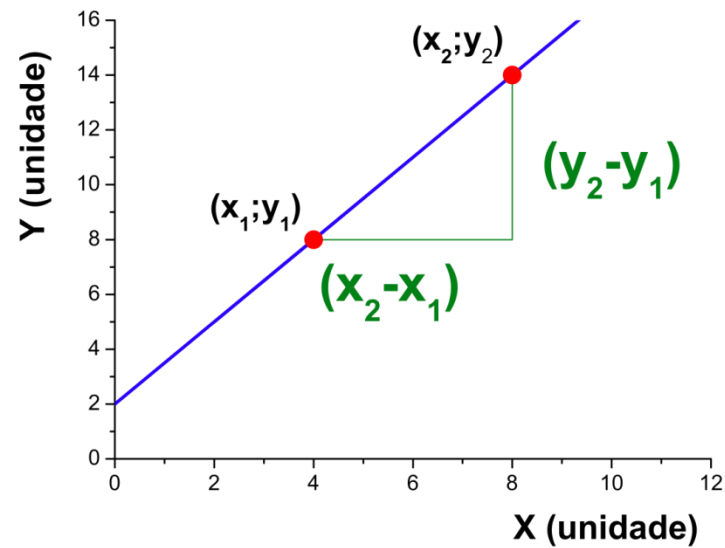
Obtenção dos parâmetros da reta pelo método gráfico



Obtenção dos parâmetros da reta pelo método gráfico



Obtenção dos parâmetros da reta pelo método gráfico



parâmetros que definem a reta

$$B = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$A = y_1 - B.x_1$$

exemplo: dilatação térmica de um líquido

$V(\text{cm}^3)$	401,10	402,04	403,20	404,35	405,30
$\Delta t(^{\circ}\text{C})$	15,0	30,0	45,0	60,0	75,0

$$V = V_0(1 + \gamma\Delta t)$$

$$y = A + Bx$$

$$V = V_0 + V_0\gamma\Delta t$$



$$A = V_0$$

$$B = V_0\gamma$$

Linearização de Curvas

- Sempre que possível, através de operações matemáticas, transformar uma função qualquer em uma função linear.....
- Em muitos casos de interesse, isto pode ser feito por uma simples substituição de variáveis.

Algumas situações comuns.....

$$1) y = A + Bx^n \Rightarrow x' = x^n$$

$$y = A + Bx'$$

n conhecido

$$n = 2 \Rightarrow x' = x^2$$

$$n = -1 \Rightarrow x' = \frac{1}{x}$$

$$n = 1/2 \Rightarrow x' = \sqrt{x}$$

$$2) y = Ae^{Bx}$$

$$\log y = \log(Ae^{Bx})$$

$$\log y = \log(A) + \log(e^{Bx})$$

$$\log y = \log(A) + Bx \log(e)$$

$$\log \Rightarrow \ln$$

$$\ln y = \ln A + Bx$$

$$y' = \ln y; A' = \ln A$$

$$y' = A' + Bx$$

$$3) y = A \cdot x^B$$

$$\log y = \log(A \cdot x^B)$$

$$\log y = \log(A) + \log(x^B)$$

$$\log y = \log(A) + B \log(x)$$

$$x' = \log(x)$$

$$y' = \log y; A' = \log A$$

$$y' = A' + Bx'$$

em geral, a linearização pode envolver uma mudança da **variável independente**, da **variável dependente** ou das

DUAS !!

- Na prática temos um conjunto de dados experimentais, para os quais podemos (OU NÃO!) conhecer a relação teórica que relaciona as **duas variáveis**.

exemplo

$$S = v \cdot t$$

v (km/h)	t (s)
34,05	1000
43,40	800
58,00	600
86,55	400
171,55	200

$$s = v \cdot t$$

$$t = s \cdot \frac{1}{v}$$

$$t \implies y$$

$$\frac{1}{v} \implies x$$

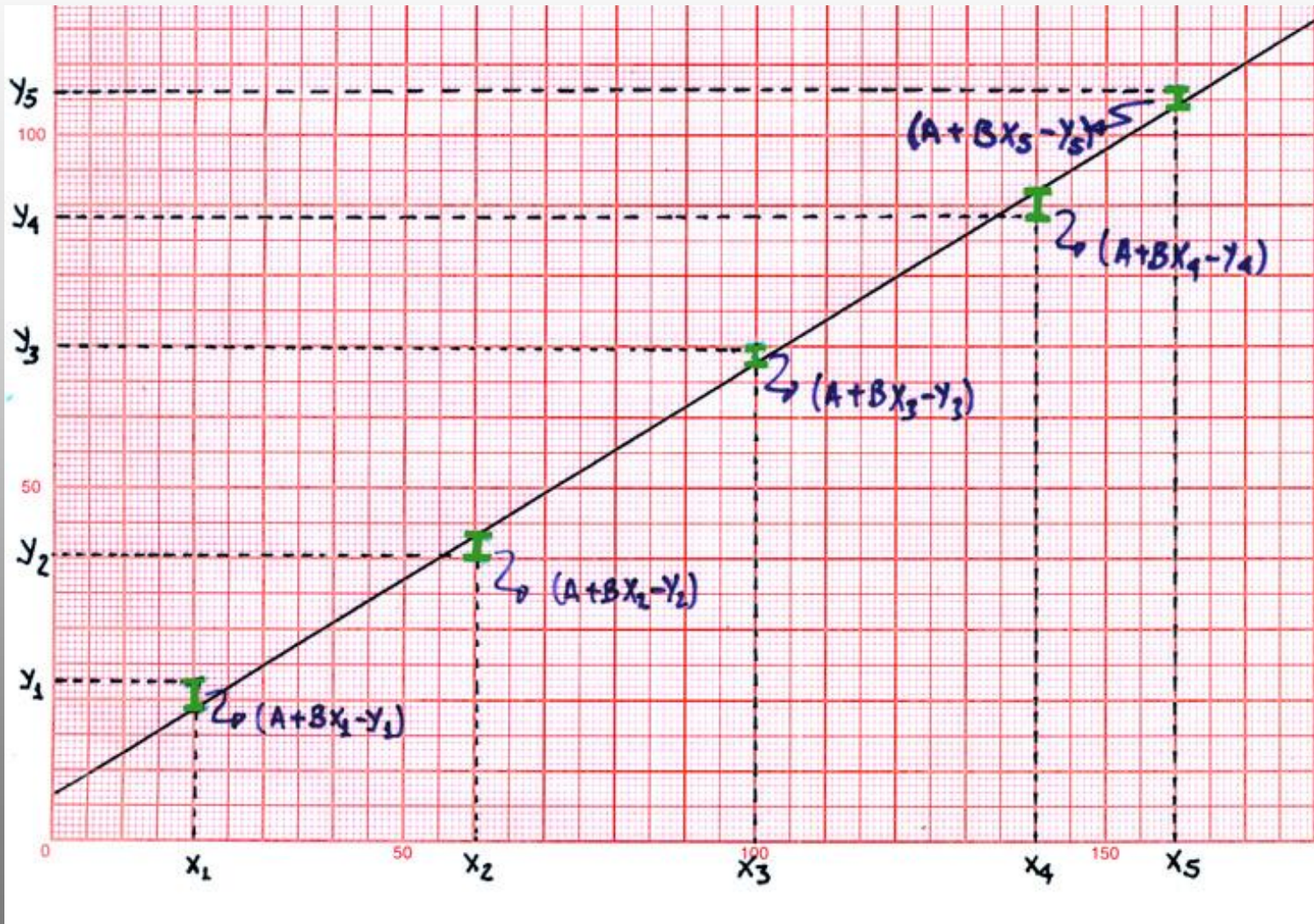
$$A = 0$$

$$B = s$$

TABELA DE DADOS LINEARIZADA

t(s)	v (km/h)	$\frac{1}{v}$ (s/m)
1000	34,05(9,458m/s)	0,1057
800	43,40(12,06m/s)	0,08292
600	58,00(16,11m/s)	0,06207
400	86,55(24,04m/s)	0,04160
200	171,55(47,65m/s)	0,02099

Ajuste de retas - *método dos mínimos quadrados (MMQ)*



$$(A + Bx_1 - y_1) + (A + Bx_2 - y_2) + (A + Bx_3 - y_3) + (A + Bx_4 - y_4) + \dots + (A + Bx_n - y_n) = \min$$

$$(A + Bx_1 - y_1)^2 + (A + Bx_2 - y_2)^2 + (A + Bx_3 - y_3)^2 + (A + Bx_4 - y_4)^2 + \dots + (A + Bx_n - y_n)^2 = \min$$

$$\sum_{i=1}^N (A + Bx_i - y_i)^2 = \min$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial A} \left\{ \sum_{i=1}^N (A + Bx_i - y_i)^2 \right\} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial B} \left\{ \sum_{i=1}^N (A + Bx_i - y_i)^2 \right\} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \sum_{i=1}^N (A + Bx_i - y_i) = 0 \\ 2 \sum_{i=1}^N (A + Bx_i - y_i) x_i = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A \sum_{i=1}^N 1 + B \sum_{i=1}^N x_i - \sum_{i=1}^N y_i = 0 \\ A \sum_{i=1}^N x_i + B \sum_{i=1}^N x_i^2 - \sum_{i=1}^N x_i y_i = 0 \end{array} \right.$$

$$\sum_{i=1}^N 1 = N$$

$$C_4 = \sum_{i=1}^N x_i y_i$$

$$C_3 = \sum_{i=1}^N x_i^2$$

$$C_2 = \sum_{i=1}^N y_i$$

$$C_1 = \sum_{i=1}^N x_i$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_3 \times (AN + BC_1 - C_2) = 0 \\ -C_1 \times (AC_1 + BC_3 - C_4) = 0 \end{array} \right.$$

+

$$A(NC_3 - C_1^2) - C_2C_3 + C_1C_4 = 0$$

$$A = \frac{C_2C_3 - C_1C_4}{NC_3 - C_1^2}$$



$$B = \frac{NC_4 - C_1C_2}{NC_3 - C_1^2}$$

$$A = \frac{[\sum_{i=1}^N x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^N y_i - \sum_{i=1}^N x_i \cdot \sum_{i=1}^N (y_i \cdot x_i)]}{[N \cdot \sum_{i=1}^N x_i^2 - (\sum_{i=1}^N x_i)^2]}$$

$$B = \frac{[N \sum_{i=1}^N (y_i \cdot x_i) - \sum_{i=1}^N x_i \cdot \sum_{i=1}^N y_i]}{[N \sum_{i=1}^N x_i^2 - (\sum_{i=1}^N x_i)^2]}$$

Dado um conjunto de pontos experimentais, como podemos saber se os coeficientes A e B calculados pelas fórmulas acima definem uma reta que representa estes pontos?? Podemos responder isso sem ter que traçar a reta.....

$$y = A + B.x$$



$$x = -\frac{A}{B} + \frac{1}{B}.y$$



$$x = A' + B'.y$$

$$B' = \frac{1}{B} \quad \longrightarrow \quad B.B' = 1$$

definimos então o coeficiente de correlação R

$$R = \sqrt{B \cdot B'}$$

$$B = \frac{[N \sum_{i=1}^N (y_i \cdot x_i) - \sum_{i=1}^N x_i \cdot \sum_{i=1}^N y_i]}{[N \sum_{i=1}^N x_i^2 - (\sum_{i=1}^N x_i)^2]}$$

$$B' = \frac{[N \sum_{i=1}^N (x_i \cdot y_i) - \sum_{i=1}^N y_i \cdot \sum_{i=1}^N x_i]}{[N \sum_{i=1}^N y_i^2 - (\sum_{i=1}^N y_i)^2]}$$

$$R = \frac{[N \cdot \sum_{i=1}^N (y_i \cdot x_i) - \sum_{i=1}^N x_i \cdot \sum_{i=1}^N (y_i)]}{\sqrt{[N \sum_{i=1}^N x_i^2 - (\sum_{i=1}^N x_i)^2] \cdot [N \sum_{i=1}^N y_i^2 - (\sum_{i=1}^N y_i)^2]}}$$

TABELA DE DADOS LINEARIZADA

t(s)	v (km/h)	$\frac{1}{v}$ (s/m)
1000	34,05(9,46m/s)	0,106
800	43,40(12,06m/s)	0,08292
600	58,00(16,11m/s)	0,06207
400	86,55(24,04m/s)	0,04160
200	171,55(47,65m/s)	0,02099

$$\sum_{i=1}^N x_i = 0,31358$$

$$\sum_{i=1}^N y_i = 3000$$

$$\sum_{i=1}^N x_i y_i = 230,416$$

$$\sum_{i=1}^N x_i^2 = 0,0001366014$$

$$\left(\sum_{i=1}^N x_i\right)^2 = 0,098332416$$

$$\left(\sum_{i=1}^N y_i\right)^2 = 9000000$$

$$\sum_{i=1}^N y_i^2 = 2200000$$

$$A = 6,838334789 = 7s.$$

$$B = 9457,90014 = 9,46 \times 10^3 m$$

$$R = 0,999708111$$

$$\Delta A = 9,1684605250$$

$$\Delta B = 131,9631911$$

O método dos mínimos quadrados pode ser estendido para um polinômio de grau n qualquer, porém vamos utilizá-lo neste Curso aplicado apenas à equação da reta. Lembrando no entanto que pode-se transformar vários tipos de equações mais complicadas em equações de reta, por linearização, os resultados acima podem ser aplicados em um número bastante grande de problemas comuns em Física ou mesmo em outras áreas.

Tomemos como exemplo as medidas de quantidade de chuva que ocorreu em vários anos e a respectiva safra de trigo.

Precipitação Pluviométrica (mm)	Safra de Trigo (t/ha)
327,7	5,4420
182,9	2,4991
287,0	4,5454
472,4	7,0184
223,5	3,6224
261,6	3,8749
403,9	6,2086
332,7	4,7370

Fonte: Frecend & Simon

Nota: Dados convertidos para Sistema Internacional de Medidas

$$\sum X = 2491,7$$

$$(\sum X)^2 = 6208568,89$$

$$\sum Y = 37,9478$$

$$\sum X^2 = 838581,77$$

$$\sum X.Y = 12767,38443$$

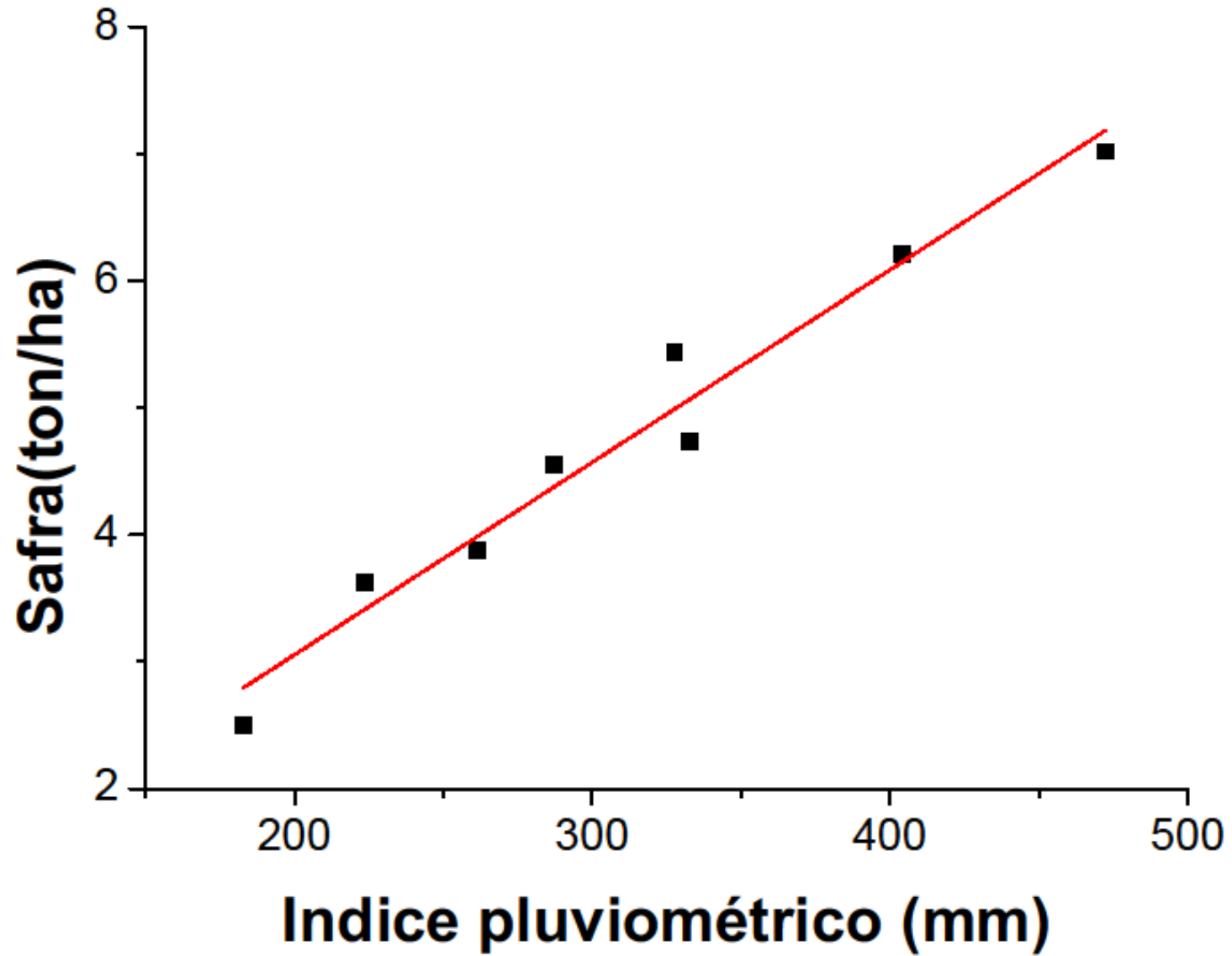
$$\sum Y^2 = 194,9019793$$

$$(\sum Y)^2 = 1440,035525$$

$$A = 0,0196796586 \simeq 0,0197 \text{ ton / ha}$$

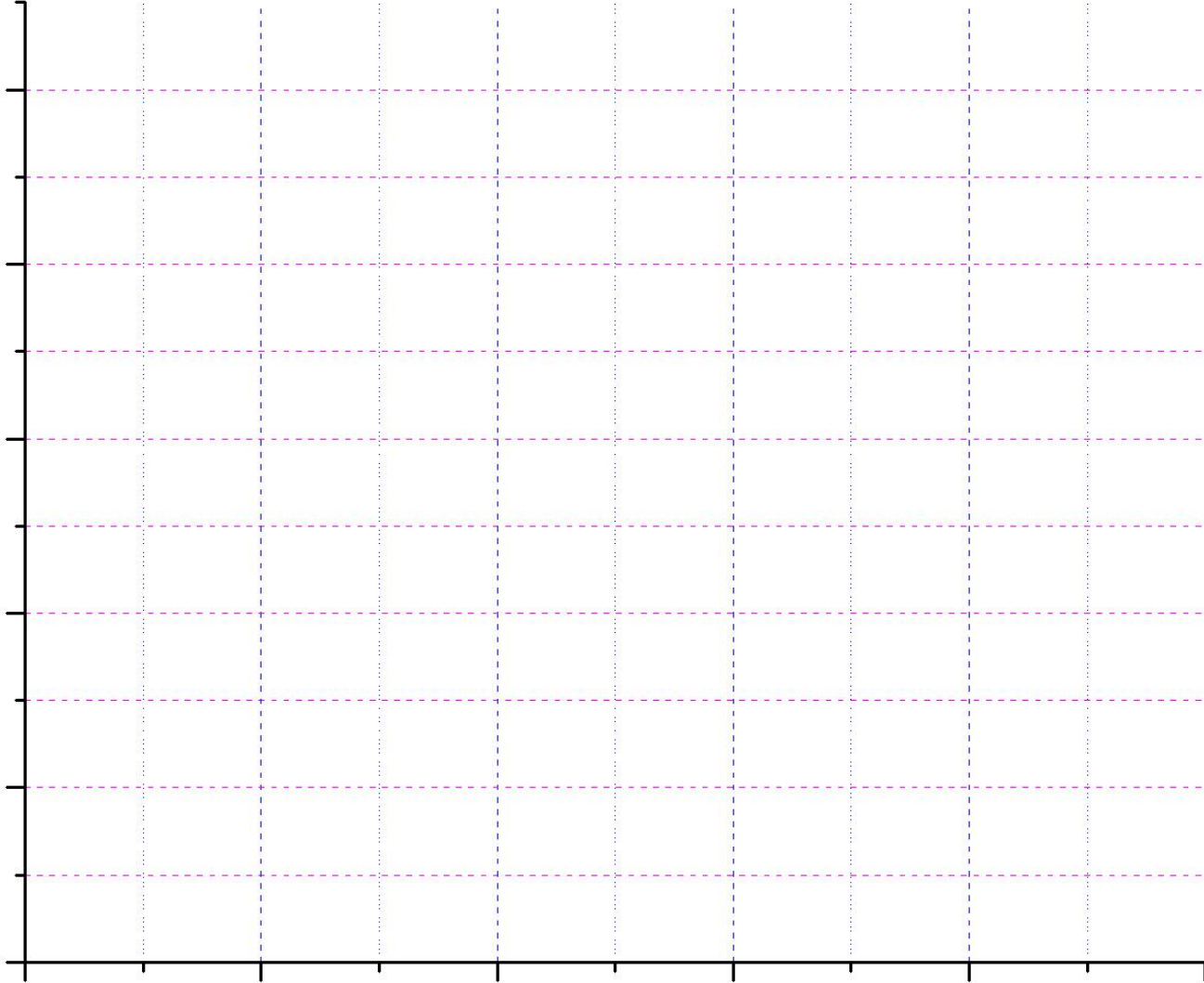
$$B = 0,0151664979 \simeq 0,01517 \text{ ton / (ha.mm)}$$

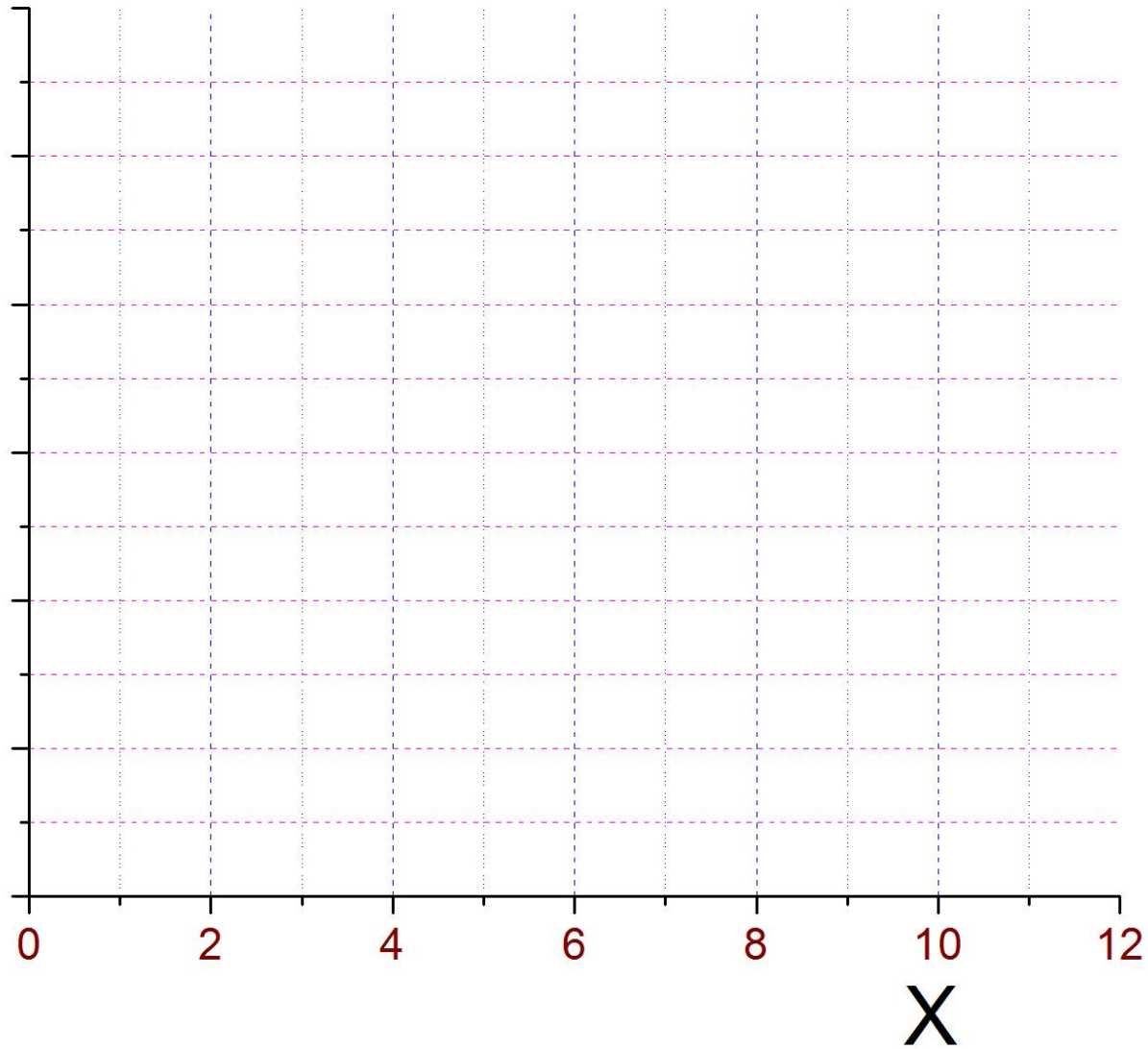
$$R \simeq 0,98$$



ESCALA LOGARÍTMICA

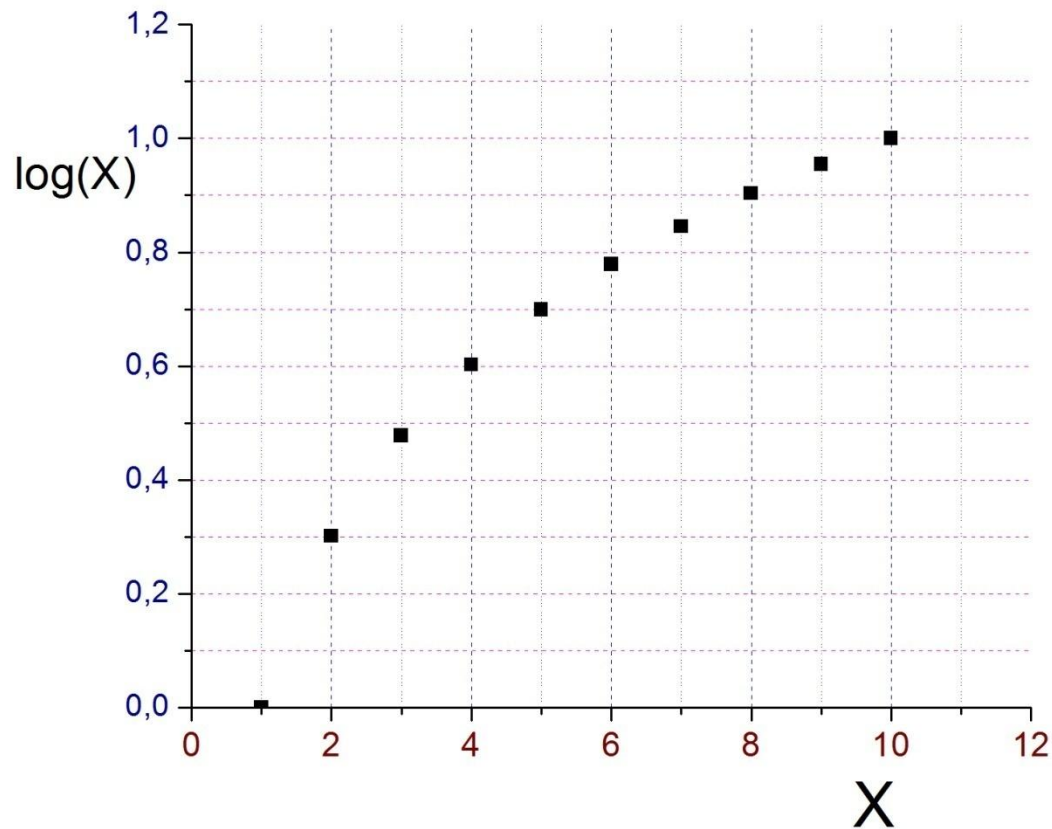
- 1) papel semi-log (monolog)
- 2) papel log-log (dilog)

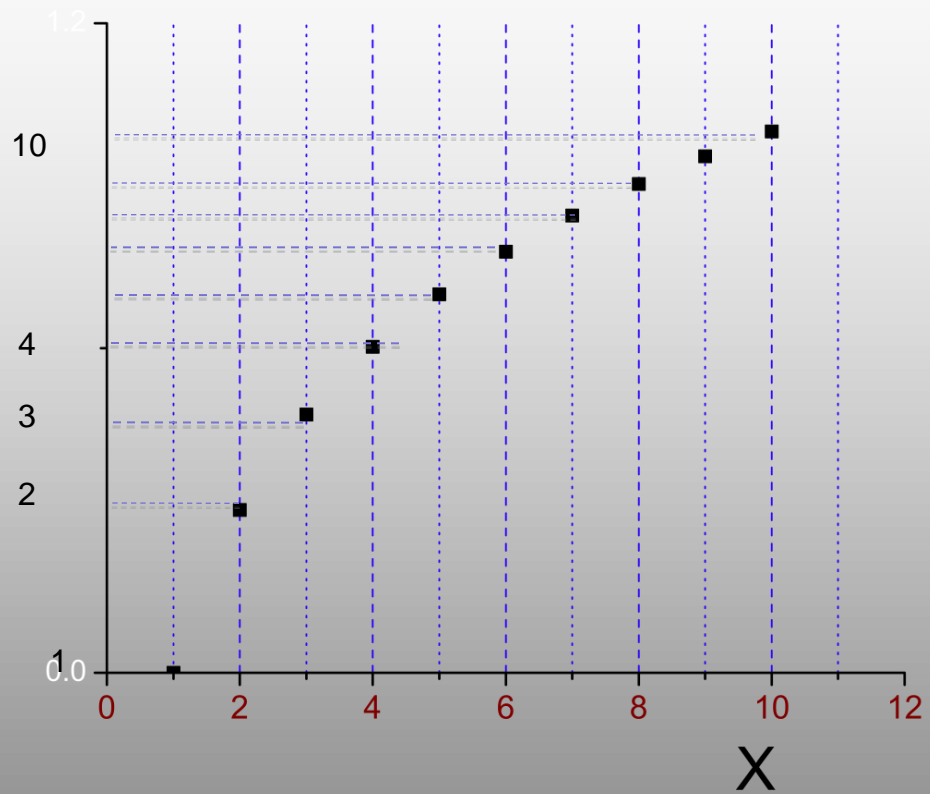


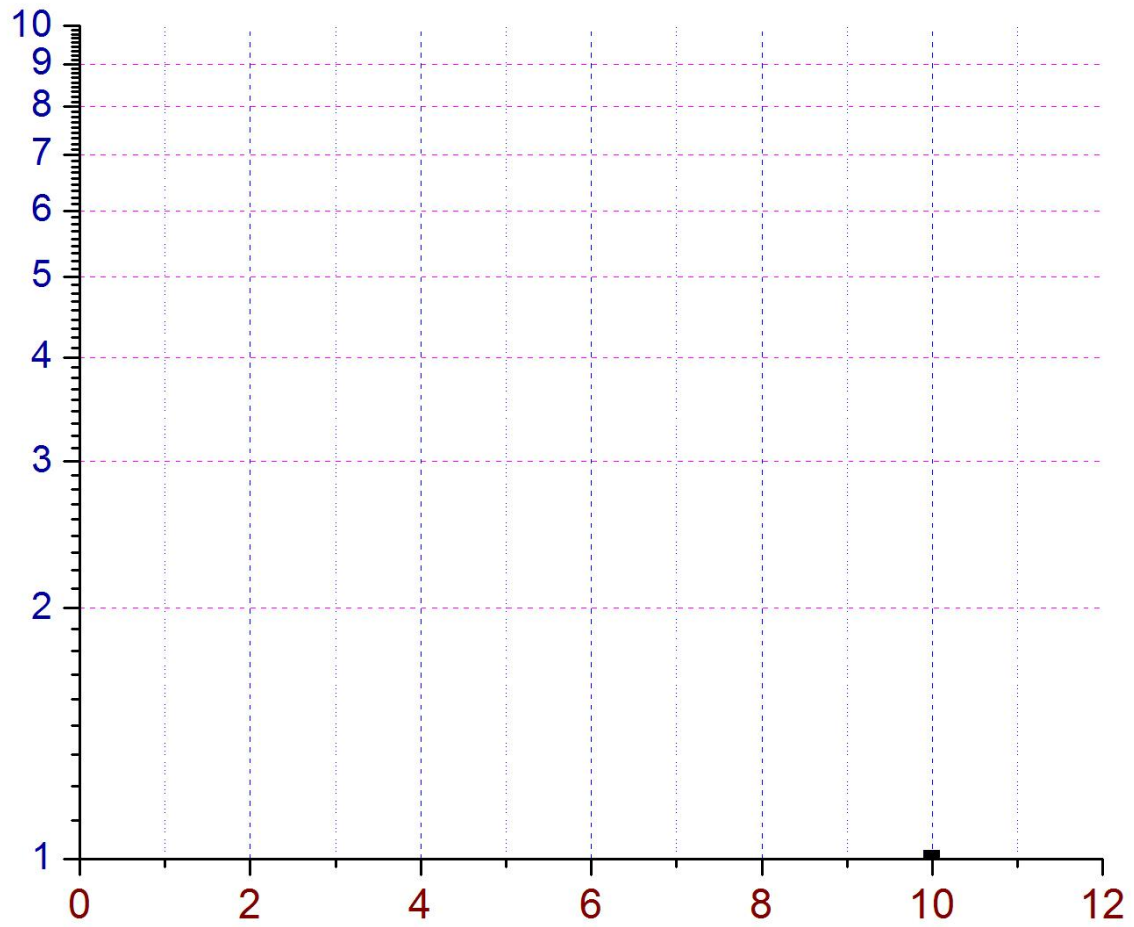


**$\log 1=0,00000$; $\log 2=0,30103$; $\log 3=0,47712$; $\log 4=0,60206$;
 $\log 5=0,69897$;**

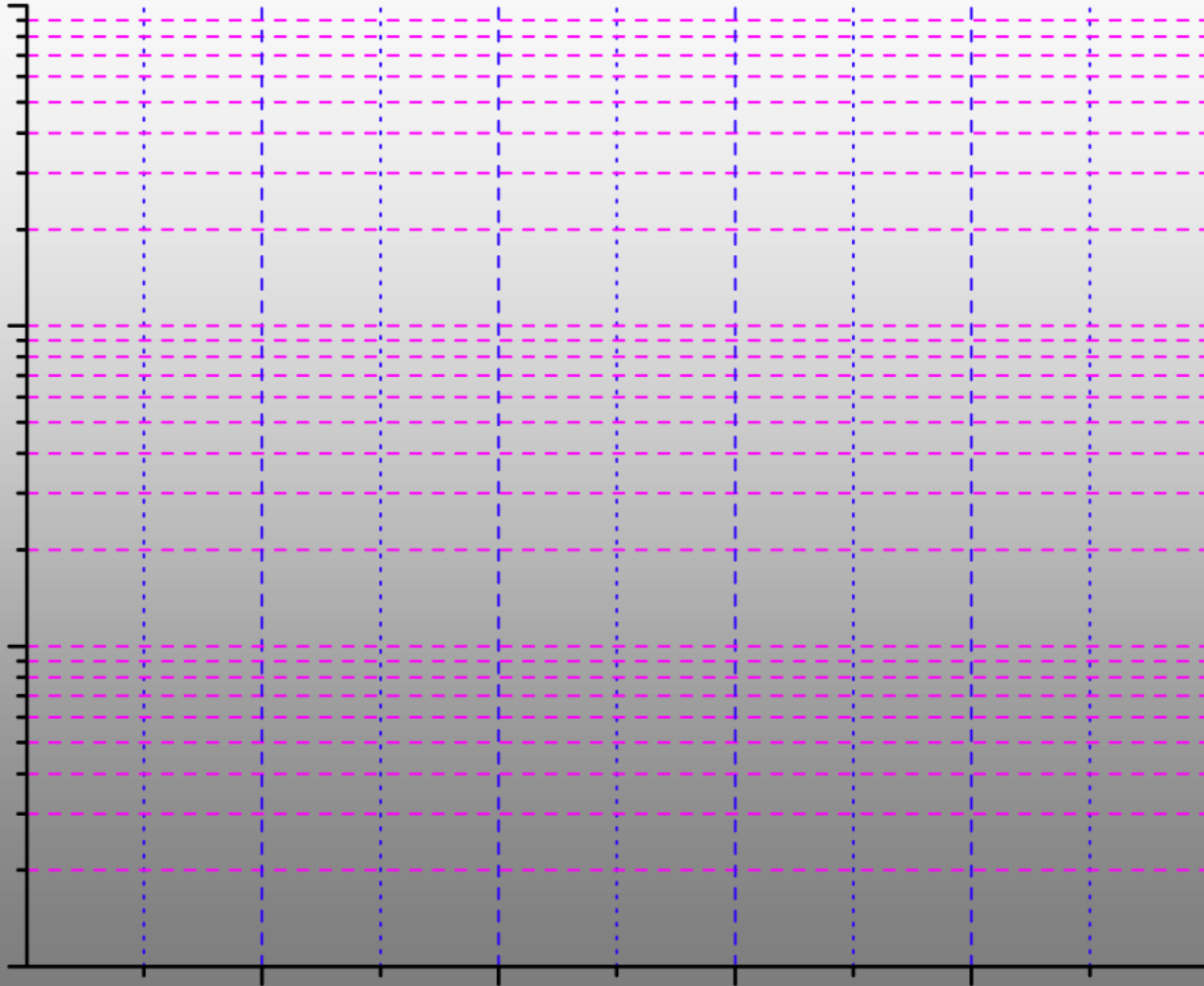
**$\log 6=0,77815$; $\log 7=0,84510$; $\log 8=0,90309$; $\log 9= 0,95424$;
 $\log 10=1,00000$;**



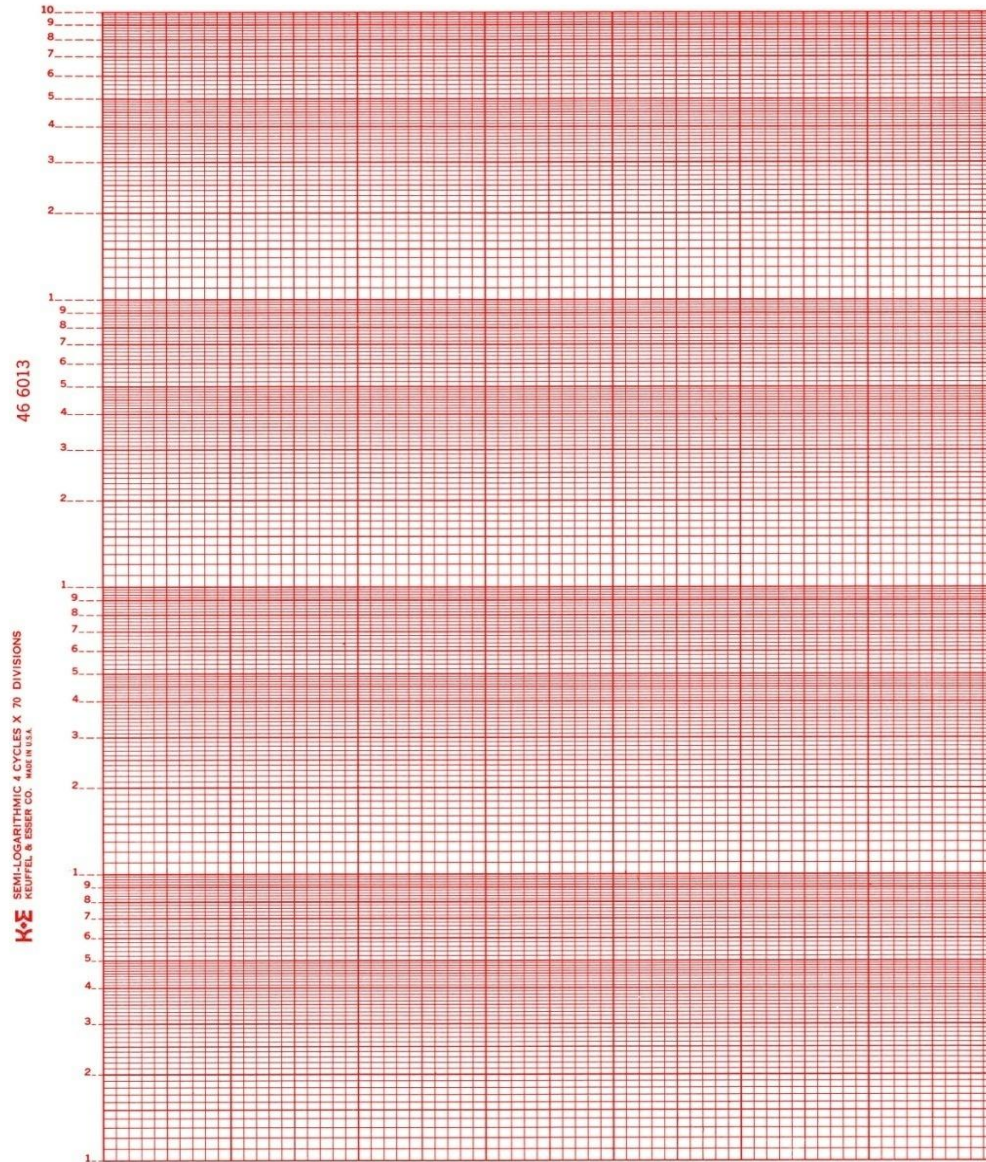




Escala monolog (semilog)



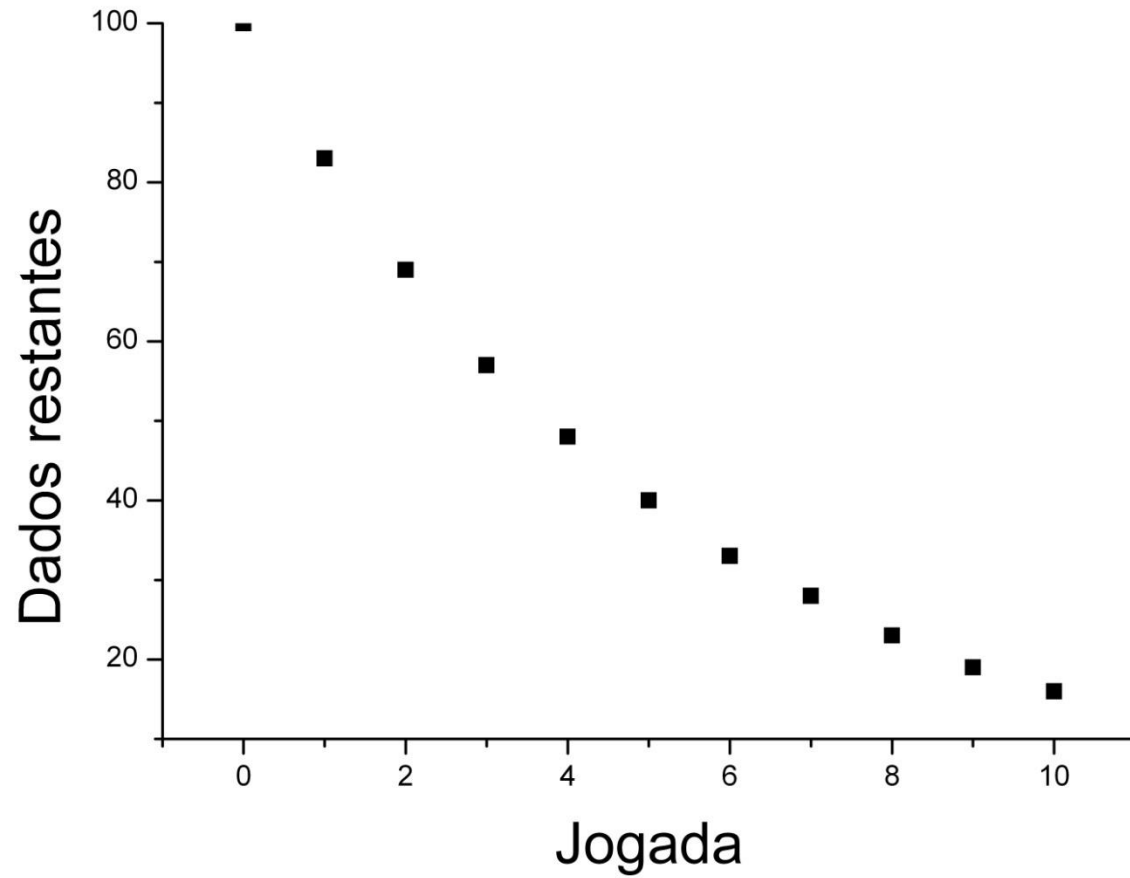
Semilog com 4 décadas



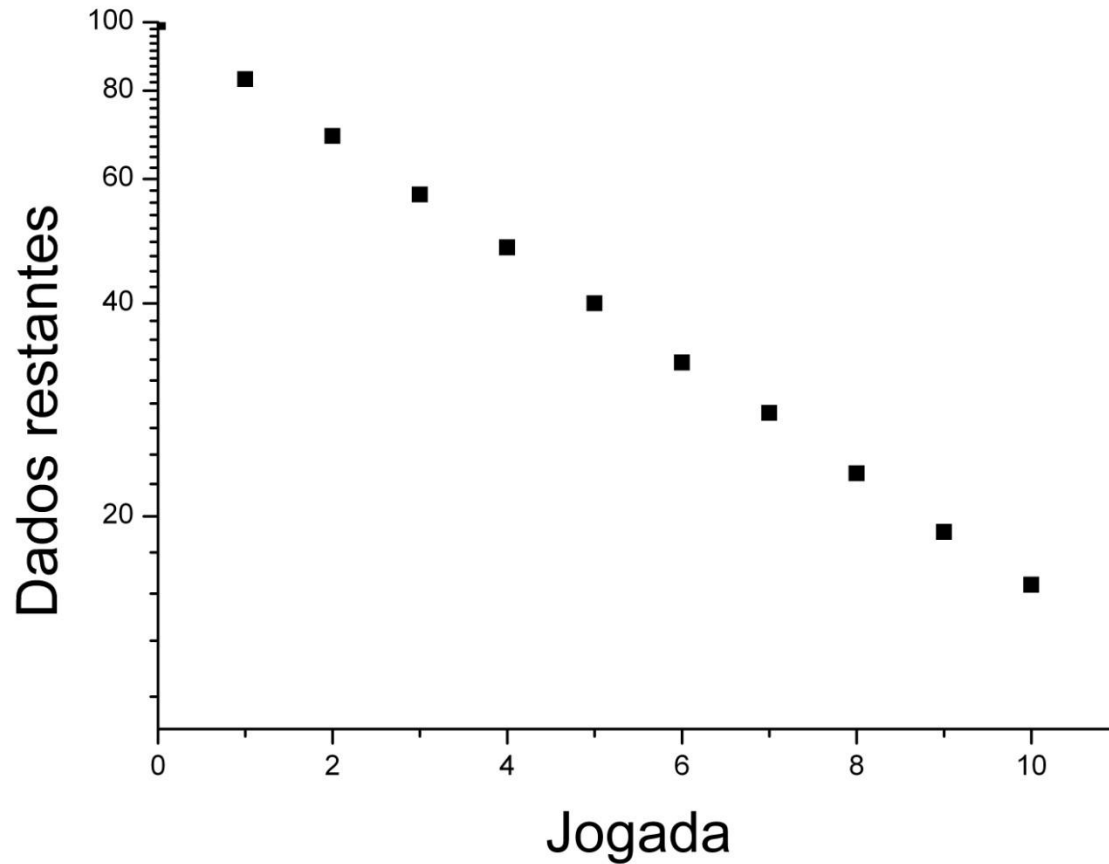
Quantos dados com o número 6?

Jogada	Retirados	Restantes
0	0	100
1	17	83
2	14	69
3	12	57
4	9	48
5	8	40
6	7	33
7	5	28
8	5	23
9	4	19
10	3	16

Escala linear



Escala logarítma (ordenada)



$$2) y = Ae^{Bx}$$

$$\log y = \log(Ae^{Bx})$$

$$\log y = \log(A) + \log(e^{Bx})$$

$$\log y = \log(A) + Bx \log(e)$$

$$\log \Rightarrow \ln$$

$$\ln y = \ln A + Bx$$

$$y' = \ln y; A' = \ln A$$

$$y' = A' + Bx$$

EXEMPLO

Em uma experiência de carga e descarga de capacitor, carrega-se o capacitor a uma dada tensão (força eletromotriz) e descarrega-se através de um resistor de resistência conhecida, medindo simultaneamente as tensões no resistor e os tempos a partir do momento que o resistor foi ligado ao capacitor. A seguir temos dados de uma experiência deste tipo:

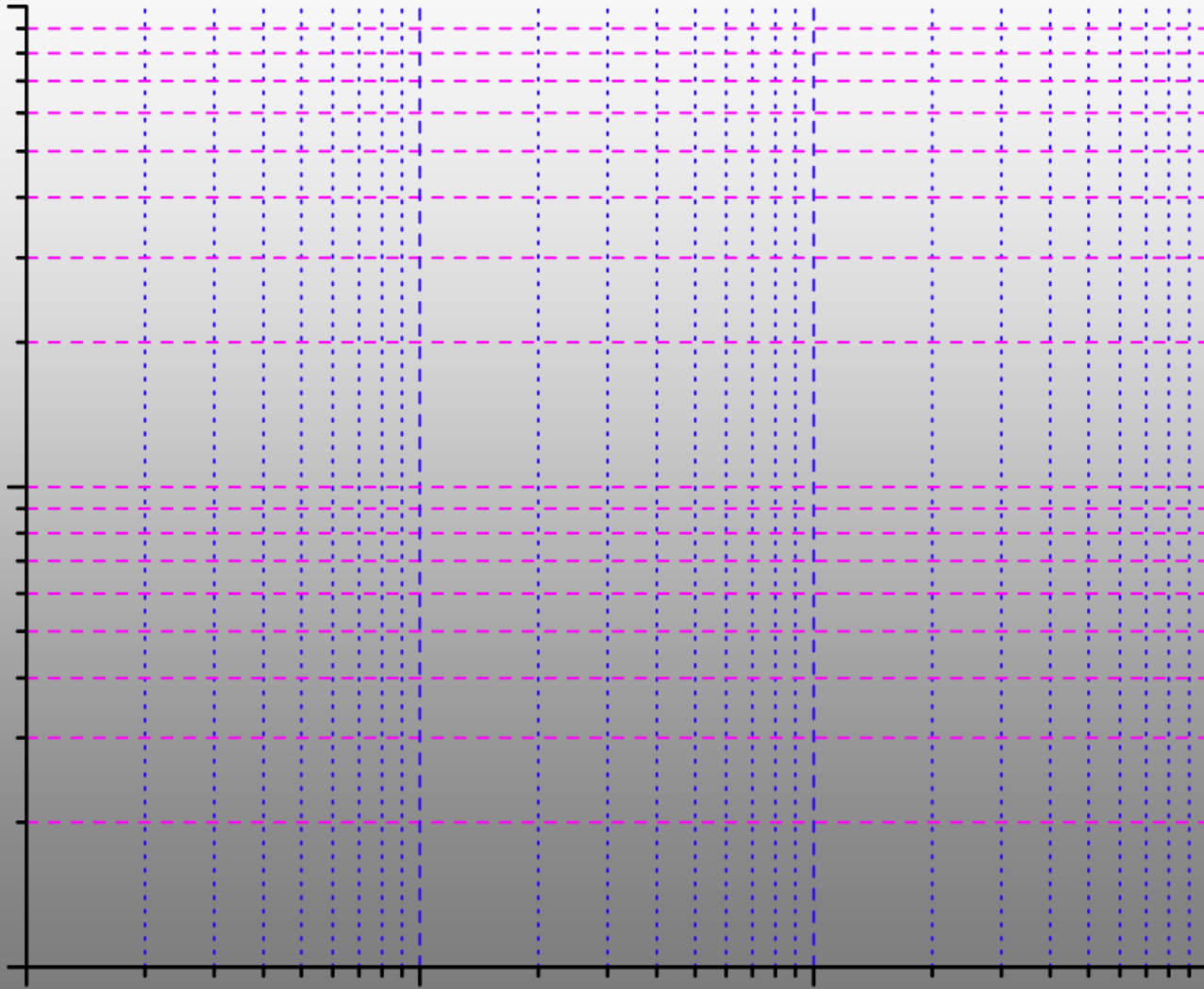
V_R (V)	63,0	40,3	25,5	16,2	10,3	6,5	4,2	2,6	1,7	1,0
Δt (s)	10,0	20,0	30,0	40,0	50,0	60,0	70,0	80,0	90,0	100,0

A equação que rege o fenômeno é :

$$V_R = Ce^{-b.t}$$

- Linearize a equação.
- Construa o gráfico em papel semi-log
- Calcule os parâmetros b e C , com as respectivas unidades.

Escala dilog (log-log)



$$3) y = A \cdot x^B$$

$$\log y = \log(A \cdot x^B)$$

$$\log y = \log(A) + \log(x^B)$$

$$\log y = \log(A) + B \log(x)$$

$$x' = \log(x)$$

$$y' = \log y; A' = \log A$$

$$y' = A' + Bx'$$

Exemplo

Em uma experiência, cujo objetivo era determinar o tempo t gasto para um corpo percorrer uma distância S , obteve-se os seguintes dados:

S (cm)	36,25	145,00	582,00	2318,00	7065,00
t (s)	50,00	100,00	200,00	400,00	698,00

Supondo que a equação do fenômeno é do tipo :

$$t = t_0 \cdot S^b$$

- Linearize a equação indicando os coeficientes linear e angular da mesma.
- Através do gráfico, calcule t_0 e b , com as respectivas unidades . *Qual o significado físico de t_0 ?*

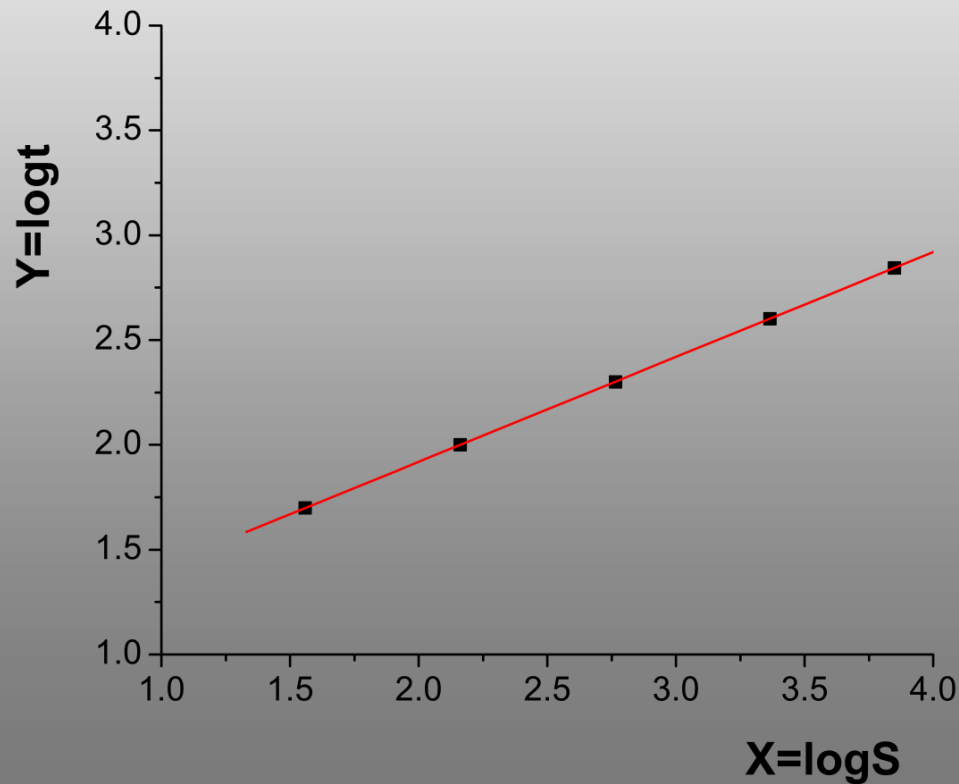
log(S) 1,559 2,1614 2,7649 3,3651 3,8491

log(t) 1,699 2,0000 2,3010 2,6021 2,8439

Pelo MMQ $A = 0,91914 \Rightarrow t_0 = 8,30118 ; 8,301 \text{ s} / \text{cm}^{0,5000}$

$B = 0,50002 \Rightarrow b = 0,5000$

$R = 1,00000$



Papel log-log ou di-log A4

UFSC - DEPARTAMENTO DE FÍSICA - LABORATÓRIO DE FÍSICA I - FSC 9301

