

FSC5122 - Laboratório de Física I
Exemplo de prova resolvida

QUESTÃO 1 [4,0 pontos]: Em uma experiência, um corpo é lançado horizontalmente de cima de uma plataforma cuja altura é h , atingindo o solo a uma distância horizontal x , medida entre o ponto imediatamente abaixo do local do lançamento e o ponto em que o corpo atinge o solo. Na tabela a seguir encontram-se valores medidos da altura h da plataforma e do tempo t de queda do corpo.

h (cm)	$200,05 \pm 0,05$	$199,83 \pm 0,05$	$200,45 \pm 0,05$	$200,65 \pm 0,05$	$200,85 \pm 0,05$
t (s)	$0,638 \pm 0,001$	$0,647 \pm 0,001$	$0,651 \pm 0,001$	$0,634 \pm 0,001$	$0,633 \pm 0,001$

(a) [0,5] Determine os valores mais prováveis de h e de t .

O valor médio $\bar{x}$ associado a um conjunto de medidas $\{x_1, x_2, \dots\}$ de uma grandeza é dado por:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}(x_1 + x_2 + \dots) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

$$\bar{h} = 200,366... = 200,37 \text{ m}$$
$$\bar{t} = 0,6406... = 0,641 \text{ s}$$

Você deve escrever os resultados com alguns algarismos além do algarismo duvidoso, que deve ser identificado com uma sobrelinha, com a respectiva unidade.

Até este ponto, sem calcular o erro aleatório provável, você não sabe se o erro final será maior ou menor que o erro de escala, e deve escrever os resultados com o mesmo número de algarismos significativos que os dados primários.

(b) [1,0] Calcule o erro aleatório provável de h e t . Apresente os cálculos em detalhes.

O erro aleatório provável E_{ap} associado a um conjunto de medidas $\{x_1, x_2, \dots\}$ e média $\bar{x}$ de uma grandeza é dado por:

$$E_{ap} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

$$E_{ap}(h) = 0,188... = 0,2 \text{ m}$$
$$E_{ap}(t) = 0,00358... = 0,004 \text{ s}$$

Escreva os resultados com vários algarismos, marcando o primeiro deles com uma sobrelinha e informando as respectivas unidades. Reserve este resultado com toda a precisão possível para cálculos posteriores.

(c) [0,5] A partir dos itens anteriores e sabendo que $h = \frac{1}{2}gt^2$, determine a aceleração da gravidade.

$$g = \frac{2h}{t^2}$$

$$g = 976,51778... \text{ m/s}^2$$

A esta altura você ainda não fez a propagação de erros e não sabe quantos algarismos significativos deverão ser efetivamente utilizados para apresentar o resultado final, mas sabe que a medida de tempo tem 3 algarismos significativos, o que implica que o resultado final não terá mais que isso. No exemplo acima, o provável último algarismo significativo está marcado com uma sobrelinha.

(d) [1,5] Determine o erro propagado para a aceleração da gravidade.

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$$
$$\Delta y = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \Delta x_1 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \Delta x_2 + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_N} \right| \Delta x_N$$

$$g = \frac{2h}{t^2}$$
$$\Delta g = \left| \frac{\partial g}{\partial h} \right| \Delta h + \left| \frac{\partial g}{\partial t} \right| \Delta t$$
$$\Delta g = \left| \frac{2}{t^2} \right| \Delta h + \left| -\frac{4h}{t^3} \right| \Delta t$$
$$\Delta h = E_{esc}(h) = 0,05 + 0,2 = 0,25$$
$$\Delta t = E_{esc}(t) + E_{ap}(t) = 0,001 + 0,004 = 0,005$$
$$\Delta g = 15,143... = 2 \times 10 \text{ m/s}^2$$

Note que a propagação de erros fez com que o erro ficasse na casa das dezenas, diferentemente das considerações anteriores, que levavam a um erro na casa das unidades.

(e) [0,5] Escreva os resultados de acordo com a teoria de erros.

$$\bar{h} = [200,366... \pm 0,05 \pm 0,2...] = (200,4 \pm 0,3) \text{ m}$$
$$\bar{t} = [0,6406... \pm 0,001 \pm 0,004...] = (0,641 \pm 0,005) \text{ s}$$
$$g = (98 \pm 2) \times 10 \text{ m/s}^2$$

Faça os cálculos sempre com pelo menos dois algarismos além do último algarismo significativo de modo a evitar erros grosseiros de arredondamento, fazendo o arredondamento somente na apresentação dos resultados finais, tanto das grandezas calculadas quanto dos erros.

QUESTÃO 02 [3,0 pontos] A frequência fundamental f de uma corda vibrante (fio) tensionada em ambos os lados por uma tração T , é dada pela relação

$$f = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Para um fio de constante com $L = 1,500 \text{ m}$ e seção $A = 0,001260 \text{ m}^2$, obteve-se as seguintes medidas de f para as correspondentes T anotadas na tabela abaixo:

f (Hz)	8,0	16,0	25,0	33,0	46,0
T (N)	2,50	10,00	27,00	50,00	103,00

(a) [0,5] Linearize a equação acima, identificando as variáveis dependente e independente, bem como os coeficientes linear e angular da mesma.

$$y = f$$
$$x = \sqrt{T}$$
$$A = 0$$
$$B = \frac{1}{2L\sqrt{\mu}}$$

ou

$$y = f^2$$
$$x = T$$
$$A = 0$$
$$B = \frac{1}{4L^2\mu}$$

(b) [1,0] Utilizando o método dos mínimos quadrados, determine a equação da melhor reta que passa pelos pontos fornecidos.

No método dos mínimos quadrados temos que:

$$y = A + Bx$$

onde:

$$A = \frac{\sum x \sum x^2 - \sum x \sum xy}{N \sum x^2 - (\sum x)^2}$$
$$B = \frac{N \sum xy - \sum x \sum y}{N \sum x^2 - (\sum x)^2}$$

podem ser calculados manualmente ou utilizando os recursos eventualmente disponíveis em sua calculadora.

f (Hz)	8,0	16,0	25,0	33,0	46,0
$\sqrt{T}$ ($\sqrt{\text{N}}$)	1,581...	3,162...	5,196...	7,071...	10,148...

$$N = 5$$
$$\sum x = 27.159... \sqrt{\text{N}}$$
$$\sum x^2 = 192.5 \text{ N}$$
$$\sum y = 128 \text{ Hz}$$
$$\sum xy = 893.3436... \sqrt{\text{N}} \cdot \text{Hz}$$
$$A = 1,6775... = 1,68 \text{ Hz}$$
$$B = 4,40406... = 4,4 \text{ Hz}/\sqrt{\text{N}}$$

ou

f^2 (Hz^2)	64	256	625	1089	2116
T (N)	2,50	10,00	27,00	50,00	103,00

$$N = 5$$
$$\sum x = 192.5 \text{ N}$$
$$\sum x^2 = 13944.25 \text{ N}^2$$
$$\sum y = 4150 \text{ Hz}^2$$
$$\sum xy = 291993 \text{ N} \cdot \text{Hz}^2$$
$$A = 50,8184... = 51 \text{ Hz}^2$$
$$B = 20,23848... = 20,2 \text{ Hz}^2/\text{N}$$

Ao fazer os cálculos dos somatórios, sempre leve em conta todos os algarismos obtidos para as variáveis transformadas. Neste exemplo em particular, ao utilizar a primeira linearização, em que $y = \sqrt{T}$, isso é fundamental para evitar a propagação de erros de arredondamento.

Alguns professores exigem que sejam colocados os valores dos somatórios e descontam nota caso não estejam presentes. Portanto, por via das dúvidas, escreva os seus valores.

Sempre indique os valores finais de A e B com os respectivos algarismos significativos e respectivas unidades. Na falta do valor dos erros em A e B , cujos valores não são solicitados na prova (e as calculadoras básicas não fornecem), utilize para A a precisão de y e para B o número de algarismos significativos da razão y/x .

(c) [1,0] Construa o gráfico para a equação linearizada e represente-a juntamente com os pontos experimentais.

O gráfico da melhor reta é feito calculando-se os valores de y para dois valores arbitrários de x utilizando os valores de A e B encontrados no item anterior.

Para a linearização $f(\sqrt{T})$, $y = 1,6775... + 4,40406...x$. Escolhendo $x_1 = 2,00 \sqrt{\text{N}}$ e $x_2 = 10,00 \sqrt{\text{N}}$ obtemos $y_1 = 10,486 \text{ Hz}$ e $y_2 = 45,718 \text{ Hz}$, respectivamente, que são os pontos marcados no primeiro dos gráficos a seguir.

Para a linearização $f^2(T)$, $y = 50,8184... + 20,23848...x$. Escolhendo $x_1 = 2,00 \text{ N}$ e $x_2 = 110,0 \text{ N}$ obtemos $y_1 = 91,3 \text{ Hz}^2$ e $y_2 = 2277 \text{ Hz}^2$, respectivamente, que são os pontos marcados no segundo dos gráficos a seguir.

Definição das escalas: se $x_{\text{mín}}$, $x_{\text{máx}}$, $y_{\text{mín}}$ e $y_{\text{máx}}$ são os extremos e L e H são a largura e a altura do papel (tipicamente 18 cm por 28 cm), os fatores de escala podem ser:

$$S_x = \text{prox} \left(\frac{x_{\text{máx}} - x_{\text{mín}}}{L} \right)$$
$$S_y = \text{prox} \left(\frac{y_{\text{máx}} - y_{\text{mín}}}{H} \right)$$

para a orientação "retrato" ou

$$S_x = \text{prox} \left(\frac{x_{\text{máx}} - x_{\text{mín}}}{H} \right)$$
$$S_y = \text{prox} \left(\frac{y_{\text{máx}} - y_{\text{mín}}}{L} \right)$$

para a orientação "paisagem", onde $\text{prox}(a)$ é o primeiro número no formato $(1, 2, 4 \text{ ou } 5) \times 10^a$ superior a a e S_x e S_y os fatores de escala a serem utilizados.

$$S_x = \text{prox} \left(\frac{10,14 - 1,58}{18} \right) = \text{prox}(0,47) \rightarrow 0,50 \sqrt{\text{N}}/\text{cm}$$
$$S_y = \text{prox} \left(\frac{46,0 - 8,0}{28} \right) = \text{prox}(1,35) \rightarrow 2,0 \text{ Hz}/\text{cm}$$

ou

$$S_x = \text{prox} \left(\frac{103,00 - 2,50}{28} \right) = \text{prox}(3,58) \rightarrow 4,00 \text{ N}/\text{cm}$$
$$S_y = \text{prox} \left(\frac{2116 - 64}{18} \right) = \text{prox}(114) \rightarrow 200 \text{ Hz}^2/\text{cm}$$

Ao fazer o gráfico, não se esqueça de:

- colocar nomes e unidades nos eixos;
- escrever os números dos rólitos com o número de algarismos significativos consistente com os dos dados originais;
- marcar claramente e com símbolos diferentes os pontos que representam os dados e os pontos calculados com a equação da melhor reta;
- colocar uma legenda esclarecendo o que representa cada grupo de pontos.

(d) [0,5] Determine a massa específica μ do fio constante, com sua respectiva unidade.

$$B = \frac{1}{2L\sqrt{\mu}}$$
$$\mu = \frac{1}{4L^2AB^2}$$
$$\mu = 4,54652... = 4,55 \text{ kg/m}^3$$

ou

$$B = \frac{1}{4L^2\mu}$$
$$\mu = \frac{1}{4L^2AB}$$
$$\mu = 4,35721... = 4,36 \text{ kg/m}^3$$

As duas abordagens parecem inconsistentes entre si, pois os valores resultantes são diferentes, $\mu = 4,55 \text{ kg/m}^3$ no primeiro caso e $\mu = 4,36 \text{ kg/m}^3$ no segundo caso, considerando apenas as regras de determinação dos algarismos significativos. Entretanto, se levamos em conta os erros calculados para o valor de B no método dos mínimos quadrados, o erro final em μ no primeiro caso fica em torno de $0,2 \text{ kg/m}^3$ e em torno de $0,1 \text{ kg/m}^3$ no segundo caso, sendo compatíveis entre si.

Apenas para informação, esclarecemos que um confusão com as unidades utilizadas nesta questão fez com que a densidade do constante (uma liga de níquel e cobre) calculada a partir dos dados da avaliação (aproximadamente 4 kg/m^3) ficasse muito abaixo da sua densidade real (aproximadamente 8900 kg/m^3).

QUESTÃO 3 [3,0 pontos] Em um experimento de queda livre, mediu-se a velocidade v com que um corpo atinge o solo, partindo do repouso, para diferentes alturas h . A relação entre estas variáveis pode ser escrita como $v = Ch^n$. Na tabela a seguir constam os valores de v obtidos para as correspondentes alturas h .

v (m/s)	8,91	17,70	39,62	62,74	93,95
h (m)	4,000	16,000	80,000	200,000	450,000

(a) [0,5] Linearize a equação acima, identificando as variáveis dependente e independente, bem como os coeficientes linear e angular da mesma.

$$v = Ch^n$$
$$\log(v) = \log(Ch^n)$$
$$\log v = \log C + n \log h$$
$$y = \log v$$
$$x = \log h$$
$$A = \log C$$
$$B = n$$

(b) [1,0] Trace o gráfico da equação linearizada em papel log-log.

Ao fazer o gráfico, não se esqueça de:

- colocar nomes e unidades nos eixos;
- escrever os números dos rólitos com o número de algarismos significativos consistente com os dos dados originais;
- marcar claramente e com símbolos diferentes os pontos que representam os dados e os pontos calculados com a equação da melhor reta;
- colocar uma legenda esclarecendo o que representa cada grupo de pontos.

(c) [1,0] A partir dos resultados obtidos em (b), determine os valores de C e de n , com suas respectivas unidades.

$$(h_1, v_1) = (5, 10)$$
$$(h_2, v_2) = (400, 90)$$
$$n = \frac{\log 90 - \log 10}{\log 400 - \log 5}$$
$$n = 0,501 \text{ (adimensional)}$$
$$\log C = \log 90 - 0,501 \log 400 = 0,6506$$
$$C = 10^{0,6506} = 4,47311...$$
$$C = 4,47 \text{ m}^{0,499}/\text{s}$$

Neste exemplo, a questão das unidades é sutil. Se $v = Ch^n$, para v dado em m/s e h em m , a unidade de C é $(\text{m/s})/\text{m}^n$, ou m^{1-n}/s (o expoente $0,499$ na unidade de C resulta de $1 - 0,501$).

(d) [0,5] Sendo $C = \sqrt{2g}$, determine a aceleração da gravidade no local do experimento.

$$C = \sqrt{2g}$$
$$g = \frac{C^2}{2}$$
$$g = \frac{(4,47311...) ^2}{2} = 10,004...$$
$$g = 10,0 \text{ m/s}^2$$

Aqui vemos que a questão assumiu que n deve ser *exatamente* $0,5$ ($\sqrt{x} = x^{0,5}$), de modo que a unidade de g (m/s^2) resulta correta.

Para os mais interessados, na pág. 132 do documento *The International System of Units (SI)* publicado pelo *Bureau International des Poids et Mesures* em 2006 (disponível em http://www.bipm.org/utis/common/pdfs/brochure_8_en.pdf) pode ser encontrada uma maneira mais elegante e geral de tratar situações como essa.