FSC5122 - Laboratório de Física I
Exemplo de prova resolvida

QUESTÃO 1 [4,0 pontos]: A relação entre a massa específica μ de uma esfera em função de seu diâmetro D e sua massa m é dada por

$$\mu = \frac{6m}{\pi D^3}$$

Os dados de um experimento constam da tabela abaixo.

D (cm)	1,5851 ± 0,0005	1,5849 ± 0,0005	1,5846 ± 0,0005	1,5847 ± 0,0005	1,5852 ± 0,0005
m (g)	16,20 ± 0,01	16,22 ± 0,01	16,23 ± 0,01	16,25 ± 0,01	16,25 ± 0,01

Determine:

(a) [0,5] Os valores mais prováveis de D e de m.

O valor médio $\bar{x}$ associado a um conjunto de medidas $\{x_1, x_2, \dots\}$ de uma grandeza é dado por:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}(x_1 + x_2 + \dots) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$\bar{D} = 1{,}584\bar{9}\ \text{cm}$$
$$\bar{m} = 16{,}2\bar{3}\ \text{g}$$

Você deve escrever os resultados com alguns algarismos além do algarismo duvidoso, que deve ser identificado com uma sobrelinha, com a respectiva unidade.

Até este ponto, sem calcular o erro aleatório provável, você não sabe se o erro final será maior ou menor que o erro de escala, e deve escrever os resultados com o mesmo número de algarismos significativos que os dados primários.

(b) [1,0] Os erros aleatórios prováveis de D e m.

O erro aleatório provável E_{ap} associado a um conjunto de medidas $\{x_1, x_2, \dots\}$ e média $\bar{x}$ de uma grandeza é dado por:

$$E_{ap} = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

$$E_{ap}(D) = 0{,}000\bar{1}14...\ \text{cm}$$
$$E_{ap}(m) = 0{,}00\bar{9}48...\ \text{g}$$

Escreva os resultados com vários algarismos, marcando o primeiro deles com uma sobrelinha e informando as respectivas unidades. Reserve este resultado com toda a precisão possível para cálculos posteriores.

(c) [0,5] O valor da massa específica μ da esfera [com sua respectiva unidade].

$$\mu = \frac{6m}{\pi D^3}$$

$$\mu = 7{,}78\bar{5}998...\ \text{g/cm}^3$$

A esta altura você ainda não fez a propagação de erros e não sabe quantos algarismos significativos deverão ser efetivamente utilizados para apresentar o resultado final, mas sabe que a medida de massa tem 4 algarismos significativos, o que implica que o resultado final não terá mais que isso. No exemplo acima, o provável último algarismo significativo está marcado com uma sobrelinha.

(d) [1,5] O erro propagado da massa específica.

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$
$$\Delta y = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|\Delta x_1 + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|\Delta x_2 + \dots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_N}\right|\Delta x_N$$

$$\mu = \frac{6m}{\pi D^3}$$
$$\Delta\mu = \left|\frac{\partial \mu}{\partial D}\right|\Delta D + \left|\frac{\partial \mu}{\partial m}\right|\Delta m$$
$$\Delta\mu = \left|-\frac{18m}{\pi D^4}\right|\Delta D + \left|\frac{6}{\pi D^3}\right|\Delta m$$
$$D = \bar{D} = 1{,}5849$$
$$m = \bar{m} = 16{,}23$$
$$\Delta D = E_{\text{esc}}(D) + E_{\text{ap}}(D) = 0,0005 + 0,000114... = 0,000614...$$
$$\Delta m = E_{\text{esc}}(m) + E_{\text{ap}}(m) = 0,01 + 0,00948... = 0,01946...$$
$$\Delta\mu = 0{,}0\bar{1}838... = 0{,}02\ \text{g/cm}^3$$

Note que a propagação de erros fez com que o erro ficasse na segunda casa decimal, diferentemente das considerações anteriores, que levavam a um erro na terceira casa decimal.

(e) [0,5] Escreva os resultados de acordo com a teoria de erros.

$$\bar{D} = [1{,}5849 \pm 0{,}0005 \pm 0{,}000114...] = (1{,}5849 \pm 0{,}0006)\ \text{cm}$$
$$\bar{m} = [16{,}23 \pm 0,01 \pm 0,00948...] = (16{,}23 \pm 0,02)\ \text{g}$$
$$\mu = [7{,}78\bar{5}998... \pm 0{,}0\bar{1}838...] = 7{,}79 \pm 0{,}02\ \text{g/cm}^3$$

Faça os cálculos sempre com pelo menos dois algarismos além do último algarismo significativo de modo a evitar erros grosseiros de arredondamento, fazendo o arredondamento somente na apresentação dos resultados finais, tanto das grandezas calculadas quanto dos erros.

QUESTÃO 02 [3,0 pontos] A velocidade de escoamento v de um líquido varia com o diâmetro D da tubulação segundo a equação

$$v = \frac{4R}{\pi D^2}$$

onde R é a vazão do líquido. Abaixo você encontra valores de velocidade medidos em função do diâmetro de vários tubos, para uma dada vazão constante R.

v (m/s)	2,402	1,661	1,199	0,938	0,740
D (m)	0,2500	0,3000	0,3500	0,4000	0,4500

(a) [0,5] Linearize a equação acima, identificando as variáveis dependente e independente, bem como os coeficientes linear e angular da mesma.

$$y = v$$
$$x = 1/D^2$$
$$A = 0$$
$$B = \frac{4R}{\pi}$$

ou

$$y = \sqrt{v}$$
$$x = 1/D$$
$$A = 0$$
$$B = \sqrt{\frac{4R}{\pi}}$$

(b) [1,0] Utilizando o método dos mínimos quadrados, determine a equação da melhor reta que passa pelos pontos fornecidos.

No método dos mínimos quadrados temos que:

$$y = A + Bx$$

onde:

$$A = \frac{\sum x \sum x^2 - \sum x \sum xy}{N\sum x^2 - (\sum x)^2}$$
$$B = \frac{N\sum xy - \sum x \sum y}{N\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

podem ser calculados manualmente ou utilizando os recursos eventualmente disponíveis em sua calculadora.

v (m/s)	2,402	1,661	1,199	0,938	0,740
$1/D^2$ (m^{-2})	16,00	11,11...	8,163...	6,250	4,938...

$$N = 5$$
$$\sum x = 46{,}462...\ \text{m}^{-2}$$
$$\sum x^2 = 509{,}54...\ \text{m}^{-4}$$
$$\sum y = 6{,}94\ \text{m/s}$$
$$\sum xy = 76{,}192...\ \text{m}^{-1}\text{s}^{-1}$$
$$A = -0{,}00\bar{9}893... = -0{,}010\ \text{m/s}$$
$$B = 0{,}150\bar{4}3... = 0{,}1504\ \text{m}^3/\text{s}$$

ou

$\sqrt{v}$ ($\sqrt{\text{m/s}}$)	1,549...	1,288...	1,095...	0,968...	0,860...
$1/D$ (m^{-1})	4,000	3,333...	2,857...	2,500	2,222...

$$N = 5$$
$$\sum x = 14{,}912...\ \text{m}^{-1}$$
$$\sum x^2 = 46{,}462...\ \text{m}^{-2}$$
$$\sum y = 5{,}7623...\ \sqrt{\text{m/s}}$$
$$\sum xy = 17{,}956...\ \text{m}^{-1/2}\text{s}^{-1/2}$$
$$A = -0{,}00\bar{4}975... = -0{,}005\ \sqrt{\text{m/s}}$$
$$B = 0{,}388\bar{0}745... = 0{,}3881\ \sqrt{\text{m}^3/\text{s}}$$

Ao fazer os cálculos dos somatórios, sempre leve em conta todos os algarismos obtidos para as variáveis transformadas. Isso é fundamental para evitar a propagação de erros de arredondamento.

Alguns professores exigem que sejam colocados os valores dos somatórios e descontam nota caso não estejam presentes. Portanto, por via das dúvidas, escreva os seus valores.

Sempre indique os valores finais de A e B com os respectivos algarismos significativos e respectivas unidades. Na falta do valor dos erros em A e B, cujos valores não são solicitados na prova (e as calculadores básicas não fornecem), utilize para A a precisão de y e para B os algarismos significativos da razão y/x.

(c) [1,0] Construa o gráfico para a equação linearizada e represente-a juntamente com os pontos experimentais.

O gráfico da melhor reta é feito calculando-se os valores de y para dois valores arbitrários de x utilizando os valores de A e B encontrados no item anterior.

Para a linearização $v(1/D^2)$, $y = -0{,}009893... + 0{,}15043...x$. Escolhendo $x_1 = 4{,}80\ \text{m}^{-2}$ e $x_2 = 16{,}50\ \text{m}^{-2}$ obtemos $y_1 = 0{,}7122$ m/s e $y_2 = 2{,}473$ m/s, respectivamente, que são os pontos marcados no primeiro dos gráficos a seguir.

Para a linearização $\sqrt{v}(1/D)$, $y = -0{,}004975... + 0{,}3881...x$. Escolhendo $x_1 = 2{,}20\ \text{m}^{-1}$ e $x_2 = 4{,}00\ \text{m}^{-1}$ obtemos $y_1 = 0{,}849\ \sqrt{\text{m/s}}$ e $y_2 = 1{,}546\ \sqrt{\text{m/s}}$, respectivamente, que são os pontos marcados no segundo dos gráficos a seguir.

Definição das escalas: se x_{min}, x_{max}, y_{min} e y_{max} são os extremos e L e H são a largura e a altura do papel (tipicamente 18 cm por 28 cm), os fatores de escala podem ser:

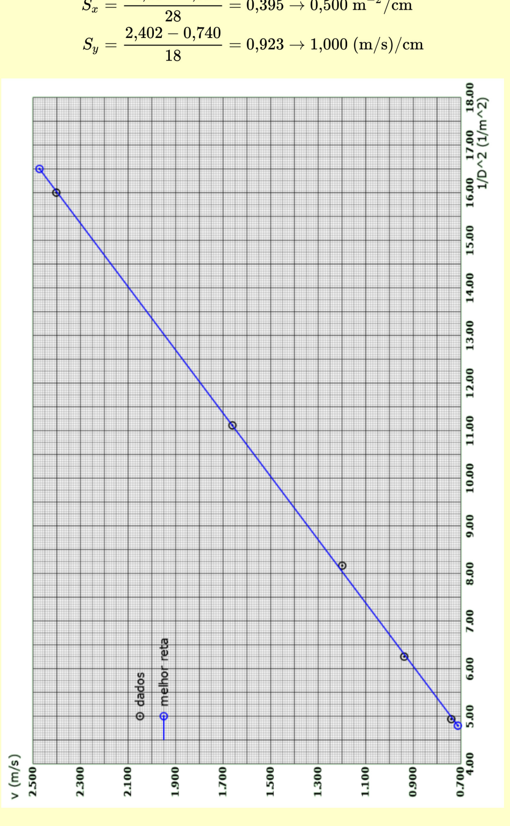
$$S_x = \text{prox}\left(\frac{x_{max} - x_{min}}{L}\right)$$
$$S_y = \text{prox}\left(\frac{y_{max} - y_{min}}{H}\right)$$

para a orientação "retrato" ou

$$S_x = \text{prox}\left(\frac{x_{max} - x_{min}}{H}\right)$$
$$S_y = \text{prox}\left(\frac{y_{max} - y_{min}}{L}\right)$$

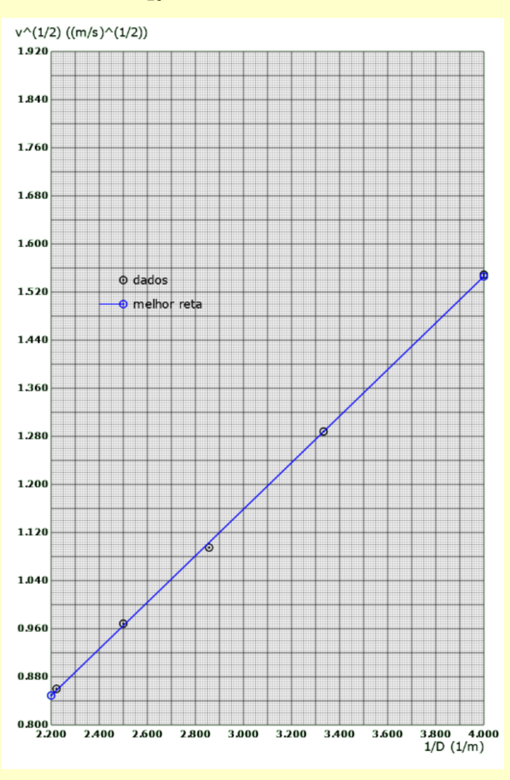
para a orientação "paisagem", onde prox(a) é o primeiro número no formato (1, 2, 4 ou 5) × 10^n superior a a e S_x e S_y os fatores de escala a serem utilizados.

$$S_x = \frac{16{,}00 - 4{,}938}{28} = 0{,}395 \to 0{,}500\ \text{m}^{-2}/\text{cm}$$
$$S_y = \frac{2{,}402 - 0{,}740}{18} = 0{,}923 \to 1{,}000\ \text{(m/s)/cm}$$



ou

$$S_x = \frac{4{,}000 - 2{,}222}{18} = 0{,}0987 \to 0{,}100\ \text{m}^{-1}/\text{cm}$$
$$S_y = \frac{1{,}549 - 0{,}8602}{28} = 0{,}0246 \to 0{,}0400\ \text{(m/s)}^{1/2}/\text{cm}$$



Ao fazer o gráfico, não se esqueça de:

- colocar nomes e unidades nos eixos;
- escrever os números dos rótulos com o número de algarismos significativos consistente com os dos dados originais;
- marcar claramente e com símbolos diferentes os pontos que representam os dados e os pontos calculados com a equação da melhor reta;
- colocar uma legenda esclarecendo o que representa cada grupo de pontos.

(d) [0,5] A partir dos resultados obtidos para o cálculo da melhor reta, determine o valor da vazão R, juntamente com sua unidade.

$$B = \frac{4R}{\pi}$$
$$R = \frac{\pi B}{4}$$
$$R = 0{,}118\bar{1}489... = 0{,}1181\ \text{m}^3/\text{s}$$

ou

$$B = \sqrt{\frac{4R}{\pi}}$$
$$R = \frac{\pi B^2}{4}$$
$$R = 0{,}118\bar{2}82... = 0{,}1183\ \text{m}^3/\text{s}$$

As duas abordagens resultam em uma pequena diferença no valor de R. Entretanto, se levamos em conta os erros calculados para o valor de B no método dos mínimos quadrados (não mostrados aqui), o erro final em R no primeiro caso fica em torno de $0{,}001\ \text{m}^3/\text{s}$ e em torno de $0{,}003\ \text{m}^3/\text{s}$ no segundo caso, ambos no terceiro algarismo significativo, deixando os resultados totalmente compatíveis entre si.

QUESTÃO 3 [3,0 pontos] A tabela a seguir mostra a amplitude (em milivolts) de um sinal de radiofrequência, em função do tempo (em milissegundos), emitido por uma amostra em um procedimento de ressonância magnética nuclear.

V (mV)	610,5	251,4	105,2	45,8	20,0
t (ms)	19,8	40,1	60,2	79,9	100,1

A relação entre essas grandezas é dada pela equação

$$V = V_0 e^{-\lambda t}$$

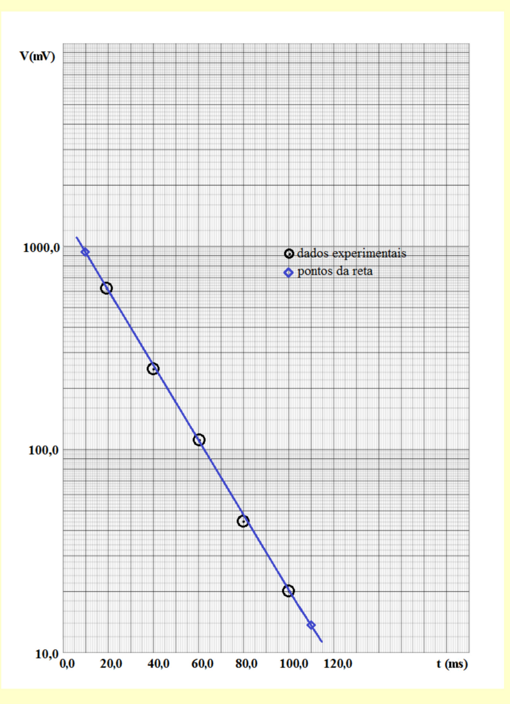
onde V_0 é a amplitude no instante $t = 0$ s e λ a constante de decaimento que se deseja medir.

(a) [0,5] Linearize a equação acima, identificando as variáveis dependente e independente, bem como os coeficientes linear e angular da mesma.

$$V = V_0 e^{-\lambda t}$$
$$\ln(V) = \ln(V_0 e^{-\lambda t})$$
$$\ln V = \ln V_0 - \lambda t$$

$$y = \ln V$$
$$x = t$$
$$A = \ln V_0$$
$$B = -\lambda$$

(b) [1,5] Trace o gráfico da equação linearizada em papel monolog (semilog).



Ao fazer o gráfico, não se esqueça de:

- colocar nomes e unidades nos eixos;
- escrever os números dos rótulos com o número de algarismos significativos consistente com os dos dados originais;
- marcar claramente e com símbolos diferentes os pontos que representam os dados e os pontos calculados com a equação da melhor reta;
- colocar uma legenda esclarecendo o que representa cada grupo de pontos.

(c) [1,0] Determine, a partir do gráfico, os valores de V_0 e de λ [com suas respectivas unidades].

$$(t_1, V_1) = (10{,}0\ \text{ms}, 920{,}0\ \text{mV})$$
$$(t_2, V_2) = (110{,}0\ \text{ms}, 13{,}8\ \text{mV})$$

$$\lambda = -B = -\frac{\ln(13{,}8\ \text{mV}) - \ln(920{,}0\ \text{mV})}{110{,}0\ \text{ms} - 10{,}0\ \text{ms}}$$
$$\lambda = -\frac{\ln(13{,}8) + \ln(\text{mV}) - \ln(920{,}0) - \ln(\text{mV})}{110{,}0\ \text{ms} - 10{,}0\ \text{ms}}$$
$$\lambda = 0{,}041\bar{9}97... = 0{,}0420\ (\text{ms})^{-1}$$

$$\ln(V_0) = \ln(920{,}0\ \text{mV}) + 0{,}041997...\ (\text{ms})^{-1} \times 10{,}0\ \text{ms}$$
$$\ln(V_0) = 6{,}8243... + \ln(\text{mV}) + 0{,}41997...$$
$$\ln(V_0) = 7{,}24437... + \ln(\text{mV})$$
$$\ln(V_0) - \ln(\text{mV}) = 7{,}24437...$$
$$\ln(V_0/\text{mV}) = 7{,}24437...$$
$$V_0/\text{mV} = e^{7{,}24437...} = 1400{,}\bar{1}62...$$
$$V_0 = 1400{,}2\ \text{mV}$$

Este item exemplifica as peculiaridades formais que podem aparecer quando lidamos com funções aplicadas às unidades das medidas, como neste caso, em que aplicamos o logaritmo a milivolts.

Observe que no cálculo de λ o numerador da fração contém os milivolts, que desaparecem no resultado final pois, como $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, os $\ln(\text{mV})$ do numerador se cancelam, sobrando apenas os milissegundos do denominador como unidade final.

Já no cálculo de V_0 note é preciso utilizar novamente a propriedade do produto dos logaritmos para explicitar o $\ln(\text{mV})$, que passa para o lado esquerdo da equação, onde usamos $\ln(a) - \ln(b) = \ln(a/b)$ para depois aplicar a exponencial e obter os resultados com a unidade corretamente manipulada.

Todo esse "carregamento" de unidades pode ser evitado utilizando-se a recomendação da pág. 132 do documento *The International System of Units (SI)* publicado pelo *Bureau International des Poids et Mesures* (http://www.bipm.org/utils/common/pdf/si_brochure_8_en.pdf, 2006).

A proposta é muito simples: ao invés de lidarmos com os dados (em tabelas e gráficos, por exemplo), *multiplicados* por suas unidades (V(mV)), lidamos com eles *divididos* por suas unidades ($V/(\text{mV})$), o que torna adimensionais os números propriamente ditos.